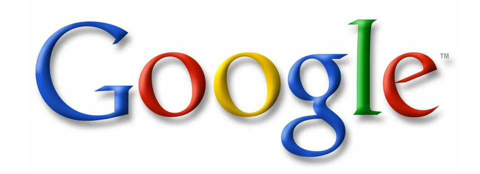


DIE KNICKFESTIGKEIT EINES STABES
MIT ELASTISCHER QUERSTÜTZUNG

VON

DR. H. ZIMMERMANN
WIRKL. GEH. OBERBAURAT
MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MIT 3 IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN
EINER TAFEL UND ZAHLREICHEN TABELLEN

BERLIN 1906
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN
(GROPIUS'SCHE BUCH- UND KUNSTHANDLUNG).

VORWORT.

Es wird vielleicht bei manchem Leser Verwunderung erregen, daß eine ziemlich eng umgrenzte Aufgabe in diesem Schriftchen einen so breiten Raum einnimmt. Die Gründe dafür sind von zweierlei Art. Erstens handelt es sich um einen Gegenstand, der meines Wissens bisher noch keine allgemeine und strenge Bearbeitung erfahren hat, so daß die Entwicklung von Anfang an neu aufgebaut werden mußte. Dabei schien es mir geboten, den ganzen Gedanken- und Rechnungsgang, der mich auf die Lösung geführt hat, so vollständig mitzuteilen, daß jeder Leser in den Stand gesetzt wird, ihn ohne langes Suchen nach weggelassenen Zwischengliedern zu verfolgen und auf seine Richtigkeit zu prüfen. Wenn diese Prüfung, wie ich hoffe, günstig ausfällt, und wenn die Ergebnisse der Untersuchung in den Besitzstand der Festigkeitslehre aufgenommen worden sind, dann wird es wohl gelingen, eine verständliche Darstellung auf nicht viel mehr Druckseiten zu geben, als sie jetzt die Lehre vom Knicken des in der Querrichtung freien Stabes erfordert. Dann wird es ferner an der Zeit sein, auch den Einfluß der verschiedenen Nebenbedingungen zu erörtern, die bei der Anwendung vorkommen können, wie z. B. der festen Führungen oder der Einspannung der Stabenden. Ich bin auf diese mit Hilfe der allgemeinen Lösung ohne große Schwierigkeiten zu behandelnden Sonderfälle absichtlich nicht näher eingegangen, weil es mir richtiger schien, nicht zu vielerlei auf einmal zu bringen, und lieber erst einen Fall um so ausführlicher zu behandeln.

Den zweiten Grund für das Anwachsen des Umfanges dieser Abhandlung bildete der Wunsch, nicht sozusagen in der Mathematik stecken zu bleiben, sondern bis zu einer technisch brauchbaren Lösung der Aufgabe vorzudringen. Daß die allgemeinen Gleichungen (3), (6) und (9) — so „schön“ sie auch sind! — eine solche Lösung nicht darstellen, darin werden wohl alle Leser mit mir einig sein. Es blieb also nichts übrig, als, statt einer bloßen Anweisung zur Ausrechnung, diese selbst zu geben. Ich habe dies für achtzig

verschiedene Beispiele durchgeführt. Der dazu erforderliche Arbeitsaufwand war sehr groß, und nur der Gedanke hat ihn mir erträglich scheinen lassen, daß damit die Sache ein- für allemal abgemacht ist. Der Leser braucht also, wenn er die Ergebnisse nicht etwa nachprüfen will, selber nichts mehr zu rechnen, er kann sie fertig aus den Zahlentafeln entnehmen. Dies wird ihn, so hoffe ich, mit der etwas breiten Darstellung aussöhnen. Und der zuletzt gebrachte Beweis, daß man in vielen Fällen mit großer Annäherung nach einer ganz einfachen geschlossenen Formel rechnen, also auch die Zahlentafeln entbehren kann, dürfte deswegen nicht weniger willkommen sein, weil er nur mit Hilfe eben dieser Tafeln augenscheinlich geführt werden konnte.

Berlin, im Juni 1906.

ZIMMERMANN.

INHALTSÜBERSICHT.

	Seite
Einleitung	1
I. Die Bedingungen für den Eintritt des Knickens	1
II. Umformung der Grundgleichungen	4
III. Grenzfälle	8
IV. Zahlenrechnungen und Beispiele für den durch $w \leqq 4{,}143$ begrenzten Bereich	11
V. Berechnung von q als Funktion von w	16
A. Berechnung von $q = q_0 + \delta$ aus k	17
B. Berechnung von δ aus w	18
C. Berechnung von δ und w für die Berührungspunkte	20
VI. Abgekürzte Berechnung von δ	23
VII. Zahlenrechnung zum Abschnitt VI. Näherungswerte von δ	25
VIII. Zahlenrechnung zum Abschnitt V. Genaue Werte von δ	27
IX. Einführung von δ in n, S und p. Geschlossene Lösung für verschwindendes δ. Zahlentafeln	34
X. Einfluß der verschiedenen Größen	40
XI. Anwendung auf Brücken	42

Berichtigung.

Seite 5 in Gleichung (14) lies $\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{1-n^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-n^2}}}$ statt $\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{1-n^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+n^2}}}$.

Einleitung.

In den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften habe ich eine Aufgabe behandelt, die als eine Erweiterung einerseits der Grundgleichung der Oberbauberechnung, anderseits der Formeln für die sogenannte exzentrische Beanspruchung eines Stabes betrachtet werden kann. Die Untersuchung bezieht sich nämlich auf einen geraden, biegsamen Stab, der in seiner ganzen Länge ununterbrochen elastisch in der Querrichtung gestützt und mit beliebig gerichteten Kräften belastet ist. Die von mir gefundene sehr allgemeine Lösung schließt als Grenzfälle die beiden vorerwähnten Gebiete, insbesondere auch den Knickfall ein, und zwar sowohl für den in der Querrichtung freien, wie für den elastisch quergestützten Stab. Die letzte Aufgabe ist von Wichtigkeit für die Druckgurte offener Brücken und für das unter Druck stehende Schienengleis. Sie war bisher noch nicht gelöst und soll daher in den nachstehenden Zeilen etwas eingehender und mehr im Sinne der technischen Anwendung behandelt werden, als es a. a. O. möglich war. Dagegen verzichte ich hier auf eine auch nur auszugsweise Wiedergabe der allgemeinen mathematischen Entwicklung.[1] Ferner soll die weitere Berechnung auf den Fall beschränkt werden, daß der Stab überall den gleichen Querschnitt und die gleiche Art und Größe der Querstützung aufweist, sowie daß nur an den Enden Kräfte in der Längsrichtung angreifen. In der genannten Abhandlung ist auch die Lösung der Aufgabe für allgemeinere Form- und Belastungsannahmen erörtert.

I. Die Bedingungen für den Eintritt des Knickens.

Wenn man die Gleichung der Biegungslinie des elastisch quergestützten Stabes zunächst unter der Annahme ableitet, daß die an den Enden wirkenden Druckkräfte S zwar die Richtung der Achse haben, aber nicht mit dieser zusammenfallen, sondern im Abstande h

[1] Ein Sonderdruck der Abhandlung ist unter dem Titel „Der gerade Stab mit stetiger, elastischer Stützung und beliebig gerichteten Einzellasten“ im Kommissionsverlage von Georg Reimer in Berlin erschienen.

davon wirken (Abb. 1), so ergibt sich, daß die Ausbiegung y eines beliebigen Punktes der Stabachse in geradem Verhältnis zu h steht, also im allgemeinen gleichzeitig mit h verschwindet. Das ist aber nur dann notwendig der Fall, d. h. der Stab bleibt nur dann bei Belastung mit einer in seine Achse fallenden Druckkraft S stets gerade, wenn die Nennerdeterminante N der Gleichungen nicht ver-

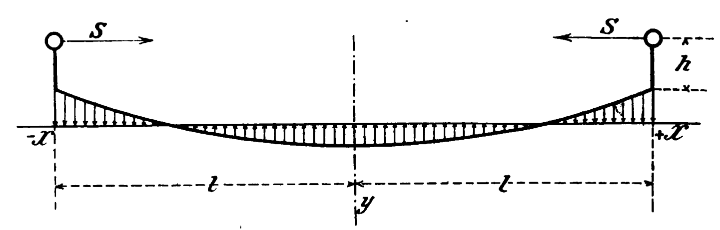


Abb. 1. In der Querrichtung elastisch gestützter Stab mit einseitiger Längsbelastung.

schwindet, aus denen die Integrationsfestwerte zu bestimmen sind, die in der Formel für y auftreten. Umgekehrt ist also

$$N = 0 \tag{1}$$

die allgemeine Bedingung dafür, daß auch bei verschwindendem Hebelarm h der Angriffskraft S endliche Werte von y möglich sind, daß also der Zustand eintritt, der bei Säulen, Druckstäben usw. als Knickgrenze bezeichnet zu werden pflegt. Die Bedingungsgleichung (1) enthält außer S die folgenden Größen:

E = Elastizitätsmaß des Baustoffes;
J = Trägheitsmoment des Stabquerschnittes, bezogen auf die zur Biegungsebene rechtwinklige Achse, die als eine Hauptachse vorausgesetzt ist;
l = halbe Länge des Stabes;
p = Stützungsdruck in der Querrichtung für die Ausbiegung 1 und die Längeneinheit des Stabes. Vorausgesetzt ist $p > 0$, da $p = 0$ auf den gewöhnlichen Knickfall führen würde; dabei ist p positiv, gerechnet im Sinne einer der Ausbiegung entgegen wirkenden Kraft.

Die im Eingange erwähnte Untersuchung hat ergeben, daß die Gleichung für y und ebenso der Ausdruck für N eine wesentlich verschiedene Form annimmt, je nachdem

$$\left(\frac{S}{2\,EJ}\right)^2 \gtreqless \frac{p}{EJ}$$

ist. Die drei hierin zusammengefaßten Fälle müssen also getrennt behandelt werden.

(2) Erster Fall: $\left(\frac{S}{2\,EJ}\right)^2 > \frac{p}{EJ}$.

Die Knickbedingung hierfür lautet:

(3) $N = \mu_1^3 \sin \mu_2 l \cos \mu_1 l - \mu_2^3 \sin \mu_1 l \cos \mu_2 l = 0.$

Die hierin auftretenden Größen μ_1 und μ_2 sind bestimmt durch die Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} \mu_1 = \sqrt{\dfrac{S}{2\,EJ} - \sqrt{\left(\dfrac{S}{2\,EJ}\right)^2 - \dfrac{p}{EJ}}}; \\ \mu_2 = \sqrt{\dfrac{S}{2\,EJ} + \sqrt{\left(\dfrac{S}{2\,EJ}\right)^2 - \dfrac{p}{EJ}}}. \end{cases}$$

(5) Zweiter Fall: $\left(\dfrac{S}{2\,EJ}\right)^2 < \dfrac{p}{EJ}.$

Die Knickbedingung hat die Form:

(6) $N = [\alpha, \beta] \sin 2\,\beta l - [\beta, \alpha]\, \mathfrak{Sin}\, 2\,\alpha l = 0.$

Hierin sind α, β und die Klammerausdrücke bestimmt durch die Gleichungen

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\sqrt{\dfrac{p}{4\,EJ}} - \dfrac{S}{4\,EJ}}; \\ \beta = \sqrt{\sqrt{\dfrac{p}{4\,EJ}} + \dfrac{S}{4\,EJ}}; \\ [\alpha, \beta] = -\alpha\left(\sqrt{\dfrac{p}{EJ}} + \dfrac{S}{EJ}\right); \\ [\beta, \alpha] = \beta\left(\sqrt{\dfrac{p}{EJ}} - \dfrac{S}{EJ}\right). \end{cases}$$

Mit $\mathfrak{Sin}$ ist, wie üblich, der Hyperbelsinus bezeichnet.[2])

(8) Dritter Fall: $\left(\dfrac{S}{2\,EJ}\right)^2 = \dfrac{p}{EJ}.$

Die Knickbedingung geht für diesen Grenzfall zwischen (2) und (5) über in

(9) $N = 3 \sin 2\,\mu l - 2\,\mu l = 0.$

Hierin ist die Größe μ bestimmt durch die Gleichung

(10) $\mu = \sqrt{\dfrac{S}{2\,EJ}}.$

---

[2]) Die zu den Zahlenrechnungen erforderlichen Werte der Sinus und Cosinus habe ich dem trefflichen Werke von Ligowski: Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen (Berlin 1890, Wilh. Ernst & Sohn) entnommen.

Diese Gleichungen, deren Herleitung aus der im Eingange genannten Abhandlung ersehen werden kann, sind so verwickelt, daß offenbar nicht daran zu denken ist, sie allgemein nach einer der in ihnen enthaltenen fünf Größen E, J, l, p und S aufzulösen. Man ist also auf den Weg der näherungsweisen Berechnung angewiesen. Auch dieser gestaltet sich übrigens noch beschwerlich genug. Wenn die Untersuchung für die Anwendung brauchbare Ergebnisse liefern soll, ist es deshalb nötig, die Rechnung ein für allemal für eine größere Anzahl von Fällen durchzuführen. Nur auf diesem Wege gelingt es, die in Betracht kommenden Gesetze in einfacher Weise zu veranschaulichen und benutzbar zu machen. Bevor wir hierzu schreiten, sind die Gleichungen aber erst noch in eine für die Zwecke der Zahlenrechnung bequemere Form zu bringen.

II. Umformung der Grundgleichungen.

Die drei Fälle (2), (5) und (8) müssen wieder getrennt behandelt werden. Setzt man zunächst allgemein

$$\frac{p}{EJ} = n^2 \left(\frac{S}{2\,EJ}\right)^2, \tag{11}$$

so ist der erste Fall gemäß (2) gekennzeichnet durch die Bedingung

$$0 < n < 1.$$

Aus (4) und (11) folgt

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{S}{2\,EJ}}\,\sqrt{1 - \sqrt{1 - n^2}};$$

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{S}{2\,EJ}}\,\sqrt{1 + \sqrt{1 - n^2}}.$$

Die Gleichung (3) läßt sich offenbar auf die Form

$$\frac{\operatorname{tg} \mu_2 l}{\operatorname{tg} \mu_1 l} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^3$$

bringen. Führt man die vorstehenden Werte von μ_1 und μ_2 ein, so folgt hieraus

$$\frac{\operatorname{tg} \sqrt{1 + \sqrt{1 - n^2}}\,\sqrt{\frac{S}{2\,EJ}}\,l}{\operatorname{tg} \sqrt{1 - \sqrt{1 - n^2}}\,\sqrt{\frac{S}{2\,EJ}}\,l} = \left[\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - n^2}}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - n^2}}}\right]^3. \tag{12}$$

Die Auflösung dieser Gleichung würde sich durch zwei Kurvenscharen bewirken lassen, die mit verschiedenen Werten von n und $l\sqrt{S : 2\,EJ}$ aufzutragen wären. Die Arbeit wird aber sehr vermindert, und die Übersicht wird erleichtert, wenn es gelingt, die eine Schar auf eine einzige Kurve zu beschränken. Dies läßt sich in der Tat erreichen. Setzt man nämlich

$$(13) \qquad \sqrt{1+\sqrt{1-n^2}}\,\sqrt{\frac{S}{2\,EJ}}\,l = w$$

$$(14) \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-n^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+n^2}}} = q,$$

so nimmt (12) die wesentlich einfachere Form

$$(15) \qquad \operatorname{tg} w = \frac{1}{q^3} \operatorname{tg} q w$$

an. Die linke Seite dieser Gleichung kann durch eine von q unabhängige Tangentenlinie, die rechte durch eine Schar ähnlicher Linien abgebildet werden, deren Lage und Gestalt aber durch q bedingt ist. Die Schnittpunkte der ersten Linie mit der Schar ergeben zusammengehörige Werte von q und w, die die Gleichung (15) erfüllen. Für jedes Paar dieser Werte sind nun aus (11), (13) und (14) zwei von den fünf Größen E, J, l, p und S als Funktionen von q und w zu berechnen.

Aus (14) folgt zunächst

$$(16) \qquad n^2 = \left(\frac{2\,q}{1+q^2}\right)^2.$$

Hiermit ergibt sich aus (13) beispielsweise

$$(17) \qquad \frac{S}{2\,EJ} = \frac{1+q^2}{2}\,\frac{w^2}{l^2}.$$

Aus (11) und (16) folgt dann

$$(18) \qquad \frac{p}{EJ} = \left(\frac{2\,q}{1+q^2}\right)^2 \left(\frac{S}{2\,EJ}\right)^2 = q^2\,\frac{w^4}{l^4}.$$

Auf diese Art sind also bei gegebenem E, J und l beliebig viele zusammengehörige Werte von p und S zu berechnen, womit die Wirkung von p, d. h. der Einfluß, den die elastische Querstützung auf die Größe der Knickkraft S ausübt, zahlenmäßig festgestellt ist.

Statt S kann mit größerer Anschaulichkeit auch das Verhältnis $S:K$ benutzt werden, unter K die Kraft verstanden, die den Stab bei fehlender Querstützung an die Grenze des Knickens bringen würde. Da bekanntlich für einen Stab von der Länge $2\,l$

$$K = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{EJ}{l^2}$$

ist, so ergibt sich aus (17)

$$(19) \qquad \frac{S}{K} = (1+q^2)\left(\frac{w}{{}^1/_2\,\pi}\right)^2.$$

Bemerkenswert ist schließlich noch, daß man statt (15) offenbar auch setzen kann

$$(20) \qquad \operatorname{cotg} w = q^3 \operatorname{cotg} q\,w,$$

womit bei kleinem q und großem w günstigere, sicher auf die Zeichenfläche fallende Schnittpunkte erreicht werden.

Zur Durchführung dieses Verfahrens ist in Abb. 2 eine Reihe zusammengehöriger Werte von q und w nach (15) und (20) bestimmt. Die Werte von q sind dabei willkürlich angenommen, und zwar von 0 bis 1 immer um $^1/_{15}$ fortschreitend. Die Ergebnisse sollen später besprochen werden.

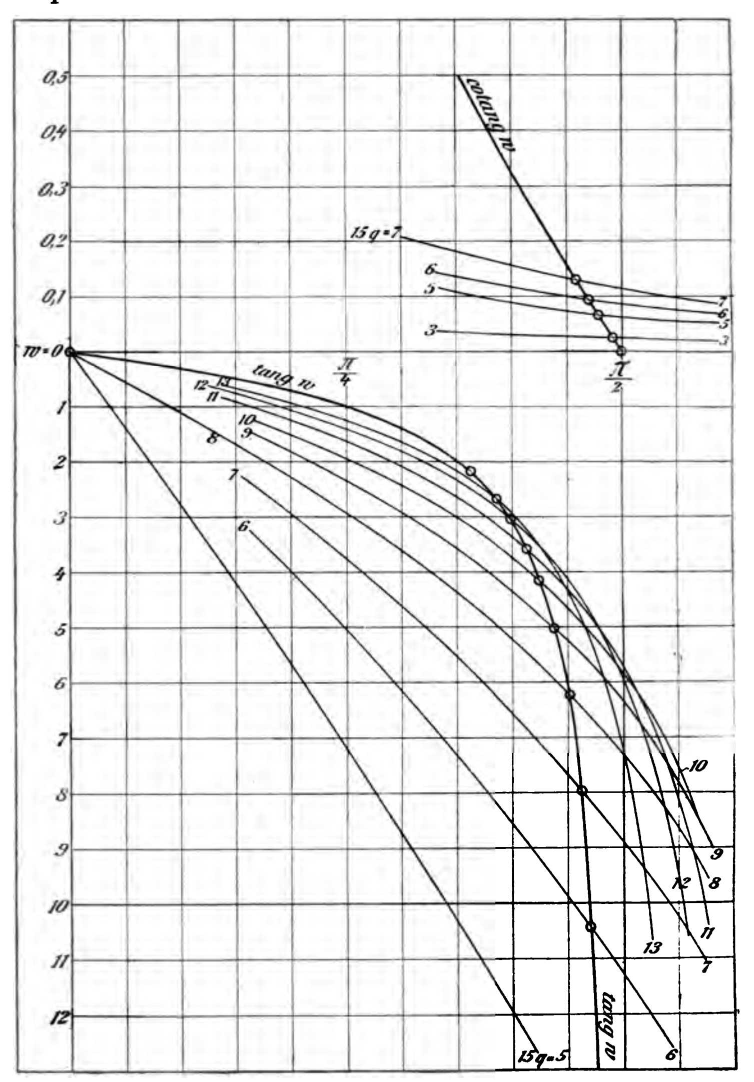


Abb. 2. Erster Fall: $n < 1$. Bestimmung der w für verschiedene q.

Wir schreiten nunmehr zum zweiten Falle, für den nach (5) und (11)

$$1 < n.$$

Mit (11) folgt aus (7)

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(n-1)\frac{S}{EJ}}; \qquad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)\frac{S}{EJ}}$$

und

$$\frac{[\alpha, \beta]}{\alpha} = -\left(\frac{1}{2}n+1\right)\frac{S}{EJ}; \quad \frac{[\beta, \alpha]}{\beta} = \left(\frac{1}{2}n-1\right)\frac{S}{EJ}.$$

Bringt man die Gleichung (6) zunächst auf die Form

$$\frac{\sin 2\beta l}{\mathfrak{Sin}\, 2\alpha l} = \frac{[\beta, \alpha]}{[\alpha, \beta]},$$

so ergibt sich durch Einsetzung der vorhergehenden Werte

$$(21) \qquad \frac{\sin\sqrt{n+1}\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,l}{\mathfrak{Sin}\sqrt{n-1}\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,l} = \frac{2-n}{2+n}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Setzt man nun nach demselben Gedankengange, wie er bei Gleichung (12) dargelegt wurde,

$$(22) \qquad \sqrt{n+1}\sqrt{\frac{S}{EJ}}\,l = w$$

und

$$(23) \qquad \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = q,$$

so folgt aus (21)

$$(24) \qquad \sin w = \frac{1-3q^2}{3-q^2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\, q w}{q}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann durch eine von q unabhängige Sinuslinie, die rechte durch eine Schar von 𝔖inuslinien abgebildet werden, deren Form und Lage durch q bestimmt ist. Die Schnittpunkte liefern wieder zusammengehörige, die Gleichung (24) erfüllende Werte der Größen q und w. Damit folgt dann aus (23)

$$(25) \qquad n^2 = \left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)^2,$$

ferner aus (22)

$$(26) \qquad \frac{S}{2\,EJ} = \frac{1-q^2}{4}\,\frac{w^2}{l^2}$$

und sodann aus (11)

$$(27) \quad \frac{p}{EJ} = \left(\frac{1+q^2}{1-q^2}\right)^2\left(\frac{S}{2\,EJ}\right)^2 = \left(\frac{1+q^2}{4}\,\frac{w^2}{l^2}\right)^2.$$

Auch hier dient es wieder zur besseren Veranschaulichung der Ergebnisse, wenn S mit der Knickkraft K für den seitlich freien Stab verglichen wird. Man findet

$$\frac{S}{K} = \frac{1 - q^2}{2} \left(\frac{w}{{}^1/_2\,\pi} \right)^2. \tag{28}$$

In Abb. 3 ist eine Reihe zusammengehöriger Werte von q und w nach (24) bestimmt. Die Werte von q sind wieder willkürlich an-

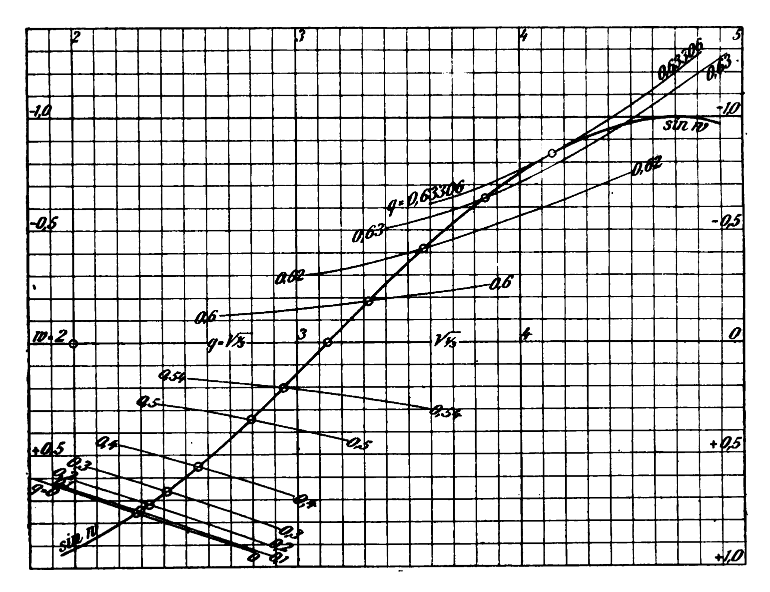


Abb. 3. Zweiter Fall: $n > 1$. Bestimmung der w für verschiedene q.

genommen. Näheres darüber folgt weiterhin. Bemerkenswert ist, daß die rechte Seite der Gleichung (24) für $q = 0$ eine im Verhältnis $1:3$ gegen die w-Achse geneigte Gerade, für $3\,q^2 = 1$ aber eine mit dieser Achse zusammenfallende Gerade darstellt.

III. Grenzfälle.

Die beiden unter II behandelten Fälle

	$0 < n < 1$	und	$1 < n$
oder	$0 < q < 1$	und	$0 < q$
nach	(14)	und	(23)

schließen den Fall $n = 1$ der Form nach aus. Es ist aber zu erwarten, daß die für $n < 1$ gefundenen Werte von S und p nur unendlich wenig von denjenigen abweichen, die sich für $n > 1$ ergeben,

wenn n nur um einen verschwindend kleinen Betrag von 1 verschieden ist. Trifft dies zu, so müssen beim Übergang zur Grenze

$$n = 1$$

oder

$$q = 1 \quad \text{und} \quad q = 0 .$$

die im ersten und zweiten Falle ermittelten Werte von S und p dann auch mit den sich im dritten Falle ergebenden übereinstimmen; denn dieser Fall setzte ja gerade die Bedingung $n = 1$ voraus. Es dient als gute Rechenprobe und zugleich als wertvolle Veranschaulichung des gesetzmäßigen Zusammenhanges der drei Fälle, wenn wir hier im einzelnen nachweisen, daß die fraglichen Grenzbedingungen durch die entwickelten Gleichungen tatsächlich erfüllt werden.

Setzen wir zunächst für den dritten Fall in Gleichung (9) und (10)

(29) $$2 \mu l = \sqrt{\frac{2S}{EJ}}\, l = w_3,$$

so geht (9) über in

(30) $$\mathbf{3 \sin w_3 - w_3 = 0.}$$

Wird nun in (13) $n = 1$ angenommen und der zugehörige Wert von w mit w_1 bezeichnet, so ergibt sich für den ersten Fall

(31) $$\sqrt{\frac{S}{2EJ}}\, l = w_1.$$

Dagegen würde mit $q = 1$ aus (15) nur eine identische Gleichung folgen.[3]) Es wird daher ein Grenzübergang erforderlich. Wir setzen zu diesem Zwecke

$$q = 1 - \delta,$$

wo δ eine positive, sich der Null nähernde kleine Größe bedeutet. Dann ist mit Vernachlässigung höherer Potenzen von δ

$$\frac{1}{q^3} = 1 + 3\delta \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} q w_1 = \operatorname{tg} w_1 - \frac{\delta w_1}{\cos^2 w_1} .$$

Dies in (15) eingesetzt liefert

$$\operatorname{tg} w_1 = \operatorname{tg} w_1 + 3\delta \operatorname{tg} w_1 - \frac{\delta w_1}{\cos^2 w_1} .$$

Solange δ nicht Null, sondern nur verschwindend klein ist, kann damit geteilt werden. Führt man dies aus und vervielfältigt man auf beiden Seiten mit $2\cos^2 w_1$, so erhält man

$$3 \sin 2 w_1 - 2 w_1 = 0.$$

[3]) Geometrisch bedeutet dies: Die in Abb. 2 den Wert $\operatorname{tg} qw : q^3$ als Funktion von w darstellende Kurve nimmt für $q = 1$ die Form der Kurve $\operatorname{tg} w$ an und fällt mit dieser zusammen. Dabei rückt der Schnittpunkt beider Kurven an die oben durch den Grenzübergang ermittelte Stelle.

Dies in Verbindung mit (30) ergibt

$$w_1 = \frac{1}{2} w_3.$$

Setzt man diesen Wert von w_1 in (31) ein, so wird

$$\sqrt{\frac{2\,S}{EJ}}\,l = w_3$$

in Übereinstimmung mit (29). Damit ist bewiesen, daß der dritte Fall auf denjenigen Wert von $\sqrt{2\,S:EJ}\,l$ führt, der sich im ersten Falle mit $n = 1$ ergibt.

Setzen wir ferner auch im zweiten Falle $n = 1$, und bezeichnen wir den zugehörigen Wert von w mit w_2, so ergibt Gleichung (22)

$$\sqrt{\frac{2\,S}{EJ}}\,l = w_2. \tag{32}$$

Da nach (23) q um so kleiner wird, je mehr sich n der 1 nähert, so kann in (24) statt $\mathfrak{Sin}\,q w_2$ gesetzt werden $q w_2$. Mit verschwindendem q geht dann (24) über in

$$\sin w_2 = \frac{1}{3} w_2,$$

was in der Form mit (30) übereinstimmt und

$$w_2 = w_3$$

ergibt. Damit folgt aus (29) und (32) wiederum derselbe Wert für $\sqrt{2\,S:EJ}\,l$. Auch für den zweiten Fall ist also der Anschluß an den dritten nachgewiesen.

Der durch (30) bestimmte, die Grenze zwischen dem ersten und zweiten Falle festlegende Wert von w ist sehr leicht anzugeben. Trägt man sin w als Funktion von w auf und zieht man durch den Nullpunkt eine Gerade, die im Verhältnis 1:3 gegen die w-Achse geneigt ist, so ergibt ihr Schnittpunkt mit der Sinuslinie das gesuchte $w = w_3 = 2{,}278\,863\ldots$ oder im Gradmaß neuer Teilung (abgerundet) zu $145^\circ\,07'\,69''$. Die zugehörigen Größen S und p finden sich in der später folgenden Zusammenstellung der Ergebnisse der Zahlenrechnung.

Es soll nun noch geprüft werden, ob die Gleichungen des ersten Falles mit $p = 0$ auch wirklich, wie oben behauptet wurde, auf den gewöhnlichen Knickfall führen, d. h. ob sich damit aus (19) tatsächlich $S = K$ ergibt. Mit p nähern sich nach (11) und (14) auch n und q der Null. Für verschwindendes q folgt aber aus (15)

$$\operatorname{tg} w = \frac{w}{q^2} = \infty;$$

mithin ist $w = \frac{1}{2}\pi$ der (kleinste) zu $p = 0$ gehörige Wert von w. Hiermit folgt sofort aus (19) richtig $S = K$. Aus der Auftragung von tg w in Abb. 2 kann dies Ergebnis nicht ersehen werden, weil

der betreffende Schnittpunkt ins Unendliche fällt. Dagegen zeigt die im oberen Teile enthaltene Darstellung nach Gleichung (20), daß sich die einzelnen Kurven der Schar q^3 cotg qw mit abnehmendem q immer mehr der w-Achse nähern und schließlich mit dieser zusammenfallen. Dann ergibt der Schnittpunkt mit der Kurve cotg w den Wert cotg $w = 0$, also $w = \frac{1}{2}\pi$.

IV. Zahlenrechnung und Beispiele für den durch $w \leqq 4{,}143$ begrenzten Bereich.

Wenn man die im Abschnitt II entwickelten Formeln nur in Verbindung mit den aus den Abb. 2 und 3 entnommenen Wertepaaren q und w benutzen wollte, so würde man die gesuchten Größen nur mit sehr geringer, selbst für technische Zwecke nicht immer genügender Genauigkeit erhalten. Da es sich aber im vorliegenden Falle nicht nur um die Anwendung, sondern um die erstmalige, grundlegende Klarstellung einer wichtigen Frage der Lehre von der Knickung handelt, so erschien ein solches Verfahren desto weniger ausreichend. Ich habe deshalb die q und w nicht nur durch Zeichnen, sondern auch durch Rechnung bestimmt und die Genauigkeit so weit getrieben, wie es die vorhandenen Hilfsmittel (Tafeln der Logarithmen der Zahlen und der Kreisfunktionen) überhaupt gestatten. Damit ist der Vorteil erreicht, daß alle gesetzmäßigen Beziehungen auch in den Zahlenwerten ganz klar hervortreten, und daß die unentbehrlichen Rechenproben mit voller Schärfe durchgeführt werden können. Bei der Anwendung wird man natürlich mit viel weniger Stellen auskommen.[4]) Im übrigen war der Rechnungsgang der folgende: Mit den aus den Abb. 2 und 3 entnommenen, zusammengehörigen Werten von q und w wurden zunächst aus (15) oder (20) und (24) mit Hilfe der Tangentenregel (Newtonschen Näherungsformel) genauere Werte w' von w berechnet. Aus w und w' ergaben sich durch wiederholte Anwendung der Sehnenregel (sog. Regula falsi) weitere, verbesserte Werte w'', w''', ... von w. Im ersten Falle [Gleichung (15) oder (20)] ließ sich dies Verfahren noch insofern verbessern, als für die letzten Näherungen die Gleichung (20) in eine solche Form gebracht werden konnte, daß die wiederholte Auflösung derselben Gleichung (auch ohne die Sehnenregel) immer genauere Werte von w ergab.

Die Abb. 3 zeigt, daß die Werte der rechten Seite von (24) für größere q negativ sind, und daß die zugehörigen Kurven die Sinuslinie unter immer spitzeren Winkeln schneiden. Von einem bestimmten Werte von q ab tritt schließlich überhaupt kein Schnitt mehr ein. Die Bestimmung dieses besonderen Wertes, der q_g genannt werden mag, und des zugehörigen w_g ist insofern wichtig, als dadurch offenbar eine Grenze in dem Verlaufe des Knickgesetzes festgelegt wird. Die genaue Ermittlung von q_g und w_g machte ziemlich

[4]) Vergl. auch die Anmerkungen 6 und 7.

viel Mühe. Da es sich hier nicht um den Schnitt, sondern um die Berührung zweier Kurven handelt, so versagte sowohl die Tangenten- wie auch die Sehnenregel. Anderseits tritt zu der Gleichung $N = 0$ noch die die Berührung ausdrückende Bedingung $dN : dw = 0$ hinzu. Setzt man zur Abkürzung den in (24) auftretenden Faktor von $\operatorname{Sin} qw$

$$\frac{1 - 3q^2}{3 - q^2}\,\frac{1}{q} = k, \tag{33}$$

so erhält man die beiden Bedingungsgleichungen für q_g und w_g in der Form:

$$\begin{cases} N = k \;\operatorname{Sin} qw - \sin w = 0; \\ \dfrac{dN}{dw} = kq \;\operatorname{Cos} qw - \cos w = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Es liegt also die Aufgabe vor, zwei transzendente Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen. Die mir zugänglichen Fachschriften enthalten nichts Brauchbares hierüber; es mußte daher erst ein geeignetes Verfahren entwickelt werden. Nach einigem Suchen fand ich mit Hilfe geometrischer Betrachtungen einen Weg, der sicher und verhältnismäßig schnell zum Ziele führte.[5]) Danach sind die folgenden genauen Werte berechnet:

$$q_g = 0{,}6330\;6087; \quad w_g = 4{,}143\;2405.$$

Hiermit wird nach (33)

$$k = -\,0{,}12294\;22536; \quad kq_g = -\,0{,}07782\;99300.^{6)}$$

Die Rechenprobe nach (34) ergibt (mit Weglassung der Zeiger g):

$k \operatorname{Sin} qw =$	$-\,0{,}8423\;6022;$	$kq \operatorname{Cos} qw =$	$-\,0{,}5389\;1499;$
$-\sin w =$	$+\,0{,}8423\;6018;$	$-\cos w =$	$+\,0{,}5389\;1496.$
Fehler:	$-\,0{,}0000\;0004;$		$-\,0{,}0000\;0003.$

Die übrigen Zahlen sind zwar mit ähnlicher Schärfe berechnet, aber in der nachfolgenden Zusammenstellung gekürzt wiedergegeben.

---

[5]) Auf eine Beschreibung dieses Verfahrens, die viel Raum beanspruchen würde, muß ich hier verzichten, bemerke aber, daß es ein allgemeines, nicht auf die besonderen Gleichungen (34) beschränktes ist. Es kann also bei jeder beliebigen Funktion f zur Lösung der Aufgabe dienen, für die Gleichung $f(p, x) = 0$ denjenigen Wert des Parameters p zu bestimmen, bei dem eine Doppelwurzel x auftritt, und zugleich deren Wert zu ermitteln.

Auch über die vorher erwähnte, für den ersten Fall verwendete Art der Näherung habe ich in den mathematischen Fachschriften nichts finden können, obgleich sie allgemein anwendbar ist und häufig Vorteile bieten dürfte.

[6]) Die größere Zahl von Stellen ist hier erforderlich, wenn die Rechenprobe für die gefundenen Werte von q_g und w_g genügend stimmen soll. Die Fehler können um eine Einheit der letzten Stelle ungenau sein.

Es wird dem aufmerksamen Leser nicht entgangen sein, daß die Gleichungen (15) und (24) für ein gegebenes q mehrere Werte von w liefern können, da die die beiden Seiten der Gleichungen darstellenden Kurven sich unter Umständen in mehreren Punkten schneiden. Es ist nicht schwer, sich über die hier vorliegenden Möglichkeiten wenigstens einen Überblick zu verschaffen. So folgt z. B. aus der periodischen Natur der Tangentenfunktion, daß die Gleichung (15) im allgemeinen unendlich viele Wurzeln w besitzt. Für $q = 0$ haben diese die Werte $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$ usw. Für $q = 1$ ist dagegen nur eine Wurzel $w_1 = 1{,}139\,4313\ldots$ vorhanden.

Die Gleichung (24) hat für $q = 0$ ebenfalls nur eine Wurzel, nämlich $w_2 = 2\,w_1 = 2{,}278\,8626\ldots.$ Wächst q, so bleibt die Zahl der Wurzeln zunächst immer die gleiche, bis bei einem bestimmten Werte von q plötzlich eine neue Wurzel, und zwar eine doppelte auftritt, die bei weiterem Anwachsen von q in zwei verschiedene Wurzeln zerfällt. So geht es sprungweise weiter, bis bei $q = 1:\sqrt{3}$ die Zahl der Wurzeln unendlich groß wird. Die Wurzelwerte sind dann π, 2π, 3π ..... usw. Bei weiterer Zunahme von q nimmt die Zahl der Wurzeln wieder sprungweise ab, bis schließlich für $q = q_g$ nur noch eine Doppelwurzel w_g und für größere Werte von q überhaupt keine Wurzel mehr vorhanden ist. (Die Zahlenwerte von q_g und w_g sind oben schon angegeben.) Man erkennt dies leicht, wenn man sich in Abb. 3 die Sinuslinie und die kurzen Stücke der Kurven $k\,\mathfrak{Sin}\,qw$ nach rechts verlängert denkt. Von allen möglichen Wurzeln sind nun in der vorliegenden Berechnung zunächst nur die kleinsten berücksichtigt. Es stände zwar nichts im Wege, auch die übrigen in der gleichen Weise zu ermitteln; das Verfahren läßt sich aber, wie im folgenden Abschnitte gezeigt werden soll, durch ein weniger mühsames und dabei übersichtlicheres ersetzen, das um so schneller zum Ziele führt, je größer w ist, und das auch noch sonstige Vorteile bietet.

Einige Worte über die in der vorletzten Spalte der Zahlenzusammenstellungen enthaltenen Größen mögen diese Erörterungen schließen. Die Anwendung der gefundenen S und p wird meist eine Einschaltung zwischen die berechneten Werte erfordern, die bei den großen Stufen nur sehr ungenaue Ergebnisse liefern kann. Dieser Umstand macht es erwünscht, womöglich eine Beziehung zwischen S und p zu gewinnen, die auf weniger veränderliche Zahlenwerte führt. Es ist ein glücklicher Zufall, daß sich eine solche in der Tat angeben läßt, nämlich die in den vorletzten Spalten aufgeführte Verhältniszahl

$$(35) \qquad \varphi = \frac{\dfrac{p l^4}{EJ}}{\dfrac{S}{K} - 1}.$$

Sie ändert sich, wie der Augenschein lehrt, nur sehr langsam. Im Bereich des ersten Falles ist ihr kleinster Wert 32,139, ihr größter 32,189; sie könnte also für alle Zwecke der Anwendung hinlänglich

genau als unveränderlich angenommen werden. Etwas schneller ändert sie sich im zweiten Falle, von 32,189 bis 33,322. Auch hier sind aber die Stufen so klein, daß ein hinlänglich genauer Wert überall mit Leichtigkeit durch Einschaltung bestimmt werden kann.[7]) Hiermit ist das ganze Rechnungsverfahren für die Anwendung in die denkbar einfachste Form gebracht. Bemerkenswert ist noch, daß der im Nenner von φ enthaltene Ausdruck $(S:K) - 1 = (S - K):K$ offenbar die durch das Vorhandensein der Querstützung p erzeugte verhältnismäßige Zunahme der Knickkraft S gegen die Knickkraft K des freien Stabes darstellt.

Die Anwendung der nebenstehenden Zahlen soll nun durch einige Beispiele erläutert werden.

1. Ein Druckstab von der Länge $2l$, dessen Querschnitt das kleinste Trägheitsmoment J besitzt, ist rechtwinklig zur Achse von J durchlaufend elastisch gestützt. Der Einheitsdruck p der Querstützung ist von solcher Größe, daß der Ausdruck $pl^4 : EJ$ den Wert 0,76 hat. In welchem Verhältnis wird die Knickkraft des Stabes durch diese Querstützung erhöht? Die Zahlentafel lehrt, daß der erste Fall ($n < 1$) vorliegt, und daß die erhöhte Knickkraft $S = 1{,}024\,K$, also nur um 2,4 vH. größer ist als K.

2. Es besteht die Möglichkeit, p zu verdoppeln, so daß $pl^4 : EJ = 1{,}52$ wird. Es zeigt sich, daß dann die Anordnung immer noch im Bereich des ersten Falles liegt, und daß S auf 1,047 steigt. Der Zuwachs von S gegenüber K hat sich also annähernd auch verdoppelt.

3. Die Querschnittsfläche des Stabes gestattet eine um 60 vH. größere Druckbeanspruchung; das Trägheitsmoment erlaubt dies aber wegen der Knickgefahr nicht. Die fehlende Knicksicherheit soll durch Querstützung beschafft werden. Wie groß muß p gemacht werden? $S : K = 1{,}60$ führt in den Bereich des zweiten Falles und entspricht $pl^4 : EJ = 19{,}85$.

4. Die zulässige Mehrbelastung auf Druck beträgt 70 vH. Der entsprechende Wert von $pl^4 : EJ$ liegt zwischen 19,85 und 26,93, ist also nicht ohne weiteres aus der Tafel zu ersehen. Wir schätzen $\varphi = 32{,}83$ und finden $pl^4 : EJ = 0{,}7 \,.\, 32{,}83 = 22{,}98$.

---

[7]) Die geringe Veränderlichkeit von φ hat zur Folge, daß sich bei nicht hinreichend genauer Berechnung von w, $S : K$ und $pl^4 : EJ$ sehr unregelmäßig fortschreitende Werte für φ ergeben. Ich fand bei kleinem n anfänglich sogar auf- und absteigende Zahlen. Dieser Umstand war der Hauptgrund dafür, die Rechnungen mit so großer Stellenzahl durchzuführen. — Der kleinste Wert von φ kann aus (35) nicht berechnet werden, da die rechte Seite die unbestimmte Form $0:0$ annimmt. Durch einen Grenzübergang ergibt sich aber für verschwindendes n der Wert $\varphi = (^1/_2\,\pi)^6 : [(^1/_2\,\pi)^2 - 2] = 32{,}138\,909\ldots$ Für $q = 1 : \sqrt{3}$ ist $\varphi = \pi^4 : 3 = 32{,}469\,697\ldots$ Der größte, die obere Grenze bildende Wert ist $\varphi = 33{,}322\,116\ldots$

IV **Erster Fall:** $0 \leqq n \leqq 1$. Tafel 1.

$15\,q$	w nach Gl. (15)	n^2 nach Gl. (16)	$S:K$ nach Gl. (19)	$pl^4:EJ$ nach Gl. (18)	$\dfrac{\frac{pl^4}{EJ}}{\frac{S}{K}-1}=\varphi$	$15\,q$
0	1,570 7963	0	1	0	32,1389	0
1	1,567 9721	0,017 621	1,000 8359	0,026 8640	32,1396	1
2	1,559 5624	0,068 649	1,003 2720	0,105 1692	32,1419	2
3	1,545 7539	0,147 929	1,007 1040	0,228 3607	32,1456	3
4	1,526 8536	0,247 930	1,012 0210	0,386 4800	32,1503	4
5	1,503 2790	0,360 000	1,017 6465	0,567 4347	32,1557	5
6	1,475 5447	0,475 624	1,023 5828	0,758 4544	32,1614	6
7	1,444 2407	0,587 405	1,029 4552	0,947 4839	32,1670	7
8	1,410 0065	0,689 647	1,034 9462	1,124 2991	32,1723	8
9	1,373 5010	0,778 547	1,039 8174	1,281 2043	32,1770	9
10	1,335 3723	0,852 071	1,043 9166	1,413 2757	32,1809	10
11	1,296 2305	0,909 653	1,047 1727	1,518 2100	32,1841	11
12	1,256 6269	0,951 814	1,049 5831	1,595 8990	32,1864	12
13	1,217 0397	0,979 799	1,051 1953	1,647 8706	32,1879	13
14	1,177 8678	0,995 255	1,052 0901	1,676 7169	32,1888	14
15	1,139 4313	1,000 000	1,052 3654	1,685 5927	32,1891	15

IV **Zweiter Fall:** $1 \leqq n$. Tafel 2.

q	w nach Gl. (24)	n^2 nach Gl. (25)	$S:K$ nach Gl. (28)	$pl^4:EJ$ nach Gl. (27)	$\dfrac{\frac{pl^4}{EJ}}{\frac{S}{K}-1}=\varphi$	q
0,00	2,278 863	1,000 000	1,052 365	1,685 593	32,189	0,00
0,10	2,292 932	1,040 812	1,054 745	1,762 330	32,191	0,10
0,20	2,337 185	1,173 611	1,062 644	2,017 061	32,199	0,20
0,30	2,418 832	1,434 730	1,078 904	2,541 883	32,215	0,30
0,40	2,554 921	1,907 029	1,111 129	3,583 486	32,246	0,40
0,50	2,790 095	2,777 778	1,183 122	5,918 016	32,317	0,50
0,54	2,939 627	3,324 290	1,240 490	7,785 830	32,375	0,54
$1:\sqrt{3}$	3,141 593	4,000 000	1,333 333	10,823 232	32,470	0,5773503
0,60	3,324 823	4,515 625	1,433 664	14,126 417	32,575	0,60
0,62	3,588 101	5,057 384	1,606 046	19,854 625	32,761	0,62
0,63	3,854 990	5,364 781	1,816 210	26,934 172	32,999	0,63
0,632	3,968 686	5,429 536	1,916 866	30,364 466	33,118	0,632
q_g	4,143 2405	5,464 349	2,084 524	36,138 641	33,322	0,6330609

Bemerkung zu beiden Zusammenstellungen: Der Strich unter einer 5 zeigt an, daß die letzte Stelle bei Weglassung der folgenden Ziffern erhöht worden ist.

In diesen Beispielen handelt es sich nur um sehr kleine Steigerungen der Knickkraft. In der Wirklichkeit kommen aber sehr viel größere vor. Wenn z. B. der Druckgurt einer offenen Brücke für eine Feldlänge die Knickfestigkeit K besitzt und acht Feldlängen aufweist, so würde (den gesamten Druck an den Enden wirkend gedacht) die Knickfestigkeit für die ganze Länge bei fehlender Querstützung nur $K:64$ sein. Soll die Festigkeit durch die Querstützung p auf das für eine Feldlänge vorhandene Maß gebracht werden, so ist p so groß zu machen, daß $S = 64\,K$ wird. Für die Berechnung dieses Wertes von p reichen die bisher gefundenen Zahlen, die nur bis zu $S:K = 2{,}084\ldots.$ gehen, nicht aus. Hierzu ist nun die Ermittlung der höheren Wurzeln der Gleichung (24) erforderlich. Wie oben schon erwähnt, lassen sich diese bequemer nach dem im folgenden Abschnitte entwickelten Verfahren finden.

V. Berechnung von q als Funktion von w.

Die im vorigen Abschnitte angewendete Art der Berechnung beruht darauf, daß in Gleichung (24) die Größe q als Unabhängigveränderliche angenommen und w als Funktion von q bestimmt wird. Dieses Verfahren erscheint zunächst auch als das zweckmäßigste sowohl für die Auftragung der Hilfskurven, wie auch für die Zahlenrechnung, zumal der Ausdruck in q auf der rechten Seite von (24) ein ziemlich verwickelter, für die Auflösung nach q nicht günstiger ist. Den Vorteilen des Verfahrens stehen aber gewichtige Nachteile gegenüber. In erster Linie macht sich der Umstand unangenehm fühlbar, daß mit einem angenommenen Werte von q mehrere, vielleicht sogar sehr viele Werte von w aus (24) folgen können, und daß sich die Zahl und ungefähre Lage dieser Wurzeln nicht von vornherein übersehen läßt. Man ist also, wenn ein einigermaßen ausgedehnter Bereich von w untersucht werden soll, zu umfangreichen Hilfsrechnungen und zeichnerischen Darstellungen genötigt, bevor man an die eigentliche Näherungsrechnung kommt. Hierbei ist, wie ein Versuch gelehrt hat, eine große Menge Arbeit ohne sichtbares Ergebnis zu leisten. Regelmäßig fortschreitende Werte von w sind aber auf diesem Wege überhaupt nicht zu erlangen. Anderseits zeigt eine Betrachtung der Abb. 3 und der Fortsetzung, die man ihr nach der Richtunng von $+w$ gegeben denken kann, daß die Gleichung (24) zu jedem beliebigen w nur einen Wert von q liefert. Die lästige Unsicherheit hinsichtlich der Zahl der Wurzeln ist also sofort beseitigt, wenn man nicht q, sondern w als Unabhängigveränderliche wählt. Aber auch über die Lage der Wurzelwerte gewinnt man hierdurch einen sicheren Aufschluß. Zunächst ist klar, daß diese Werte nur zwischen $q = 0$ und $q = q_g = 0{,}6330\,6087$ liegen können. Ferner erkennt man leicht, daß der Natur der Sinusfunktion gemäß die Schnittpunkte der Kurve $\sin w$ und der durch die rechte Seite von (24) dargestellten Kurven $k\,\mathfrak{Sin}\,q\,w$ bei stetig wachsendem w bald über, bald unter der w-Achse liegen müssen, daß also k abwechselnd negative und positive Werte haben

muß.[8]) Diesem wellenförmigen Verlaufe von k entspricht ein ähnlicher Verlauf von q; und zwar lehrt eine genauere Betrachtung, daß die Höhen der Wellenlinie, die q als Funktion von w darstellt, mit wachsendem w schnell abnehmen, wobei sich q dem Grenzwerte $1:\sqrt{3}$ nähert. Es ist das der Wert von q, für den die Gleichung (24), wie schon im vorigen Abschnitte erwähnt wurde, unendlich viele Wurzeln w besitzt. Diesen Umstand habe ich dazu benutzt, ein Näherungsverfahren zur Berechnung von q als Funktion von w zu entwickeln, das Auftragungen nicht erfordert. Es wird sich zeigen, daß dabei zugleich ein guter Überblick über die in Betracht kommenden Gesetze, und ferner eine ganz einfache Knickformel für große Werte von w gewonnen wird.

A. Berechnung von q aus k.

Der bequemeren Schreibung wegen möge der zuvor erwähnte Grenzwert von q mit q_0 bezeichnet werden, so daß also

(36) $$q_0 = 1 : \sqrt{3} = 0{,}5773\,5027.$$

Für den allgemeinen Wert von q setzen wir

(37) $$q = q_0 + \delta,$$

wo nun δ eine verhältnismäßig kleine, mit wachsendem w gegen Null gehende Größe ist.[9]) Hiermit ist die Aufgabe, q als Funktion von k darzustellen, auf die andere zurückgeführt, δ aus k zu berechnen.

Mit $q = 1:\sqrt{3} + \delta$ folgt aus (33)

(38) $$k = \frac{1 - 3q^2}{(3 - q^2)\,q} = \frac{-2\sqrt{3}\,\delta - 3\delta^2}{\frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 2\delta - \sqrt{3}\,\delta^2 - \delta^3}.$$

Setzt man zur Abkürzung

(39) $$\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\delta = 0{,}8660\,2540\,\delta = \varepsilon,$$

so läßt sich (38) auf die Form

(40) $$k = -\frac{9}{4}\delta\,\frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{3}{2}\varepsilon^2 - \varepsilon^3}$$

bringen. Hieraus folgt

$$\delta = -\frac{4}{9}k\left\{1 + \frac{\varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon - \varepsilon^2\right)}{1 + \varepsilon}\right\}.$$

---

[8]) Wegen k s. Gleichung (33).

[9]) Der größte mögliche Wert von δ ist
$q_g - q_0 = 0{,}6330\,6087 - 0{,}5773\,5027 = 0{,}0557\,1060.$

Wird zur weiteren Abkürzung noch die Bezeichnung

$$\frac{\varepsilon\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\varepsilon-\varepsilon^2\right)}{1+\varepsilon}=[\delta] \tag{41}$$

eingeführt, so ergibt sich

$$\delta=-\frac{4}{9}k\{1+[\delta]\}. \tag{42}$$

Nach (39) und (41) ist $[\delta]$ eine Funktion von δ. Für die Anwendung ist es von Wichtigkeit, daß $[\delta]$ klein ist gegen 1, so daß also in erster Annäherung gesetzt werden kann

$$\delta=-\frac{4}{9}k; \tag{43}$$

und zwar trifft diese Gleichung um so schärfer zu, je größer w, je kleiner also δ ist.[10] Soll δ für nicht sehr große Werte von w aus k berechnet werden, so ist ein erster Näherungswert von δ aus (43) zu ermitteln und damit ε aus (39) und $[\delta]$ aus (41) zu bestimmen, worauf sich aus (42) ein genauerer Wert von δ ergibt. Damit folgt dann aus (39) und (41) ein genaueres $[\delta]$ und hiermit aus (42) ein weiter verbesserter Wert von δ. Dieses Verfahren ist so lange fortzusetzen, bis die gewünschte Stellenzahl erreicht ist. Die Gleichung (42) ergibt δ in aller Strenge, sobald sie mit demselben Wert von δ auf der linken Seite wie in $[\delta]$ erfüllt ist. Die wiederholte Ausrechnung wäre entbehrlich, wenn von vornherein ein hinreichend genauer Näherungswert von $[\delta]$ zur Verfügung stände. Im folgenden wird gezeigt werden, wie man unter gewissen Umständen einen solchen Wert von $[\delta]$ im Laufe der weiter auszuführenden Rechnungen gewinnen kann. Dann ist also die Gleichung (42) immer nur einmal aufzulösen. Nachdem so δ gefunden, ergibt sich q aus (37).

B. Berechnung von δ aus w.

Die vorstehenden Entwicklungen genügen natürlich noch nicht zur Lösung der gestellten Aufgabe, da k aus Gleichung (24) nicht unmittelbar als Funktion von w berechnet werden kann. Denn es ist

$$k=\frac{\sin w}{\mathfrak{Sin}\, qw} \tag{44}$$

zugleich Funktion der gesuchten Größe q. Um dieses Hindernis zu überwinden, setzen wir in (44) für q zunächst den Mittelwert

$$q=q_0=1:\sqrt{3}$$

---

[10]) Die Größe $[\delta]$ läßt sich mittels der Rechenmaschine mit einmaliger Einstellung von ε bequem ausrechnen. Ihr größter Wert ist $=0{,}0195\,7503$. Der Fehler der Gleichung (43) ist also stets kleiner als 2 vH.

und erhalten damit aus (43) und (44) für δ den vorläufigen ersten Näherungswert

$$(45\text{a})\qquad \delta_1' = -\frac{4}{9}\frac{\sin w}{\mathfrak{Sin}\, q_0 w}.$$

Hiermit ergibt sich aus (39), (41) und (42)

$$(46\text{a})\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\delta_1'; \quad [\delta_1'] = \dfrac{\varepsilon_1\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2\right)}{1+\varepsilon_1} \\ \text{und} \qquad\qquad \delta_1 = \delta_1'\{1 + [\delta_1']\} \end{cases}$$

als verbesserter erster Näherungswert.

Es würde keinen Zweck haben, mit diesem Werte von δ_1 noch ein genaueres $[\delta]$ zu berechnen (wie unter A geschildert), weil ja auch Gleichung (45a) (wegen der Einführung von q_0 statt q) nur annähernd richtig ist. Wir setzen deshalb jetzt

$$(47\text{a})\qquad q = q_1 = q_0 + \delta_1$$

und erhalten an Stelle von (45a) die genauere Gleichung

$$(45\text{b})\qquad \delta_2' = -\frac{4}{9}\frac{\sin w}{\mathfrak{Sin}\, q_1 w}.$$

Mit dem hieraus gefundenen vorläufigen zweiten Näherungswerte δ_2' könnte man nun nach dem Muster von (46a) den verbesserten zweiten Wert δ_2 berechnen. Ein genaueres Ergebnis bekommt man aber, wenn man gleich einen besseren Wert von $[\delta]$ bestimmt; und dies kann in folgender Weise geschehen. Mit dem in (46a) gefundenen ersten Werte $[\delta_1']$ ergibt sich zunächst nach (42) ein Zwischenwert

$$(42\text{b})\qquad \delta_2'' = \delta_2'\{1 + [\delta_1']\}.$$

Erst mit diesem Werte verfahren wir nun nach dem Vorbild von (46a), so daß sich

$$(46\text{b})\quad \begin{cases} \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\delta_2''; \quad [\delta_2''] = \dfrac{\varepsilon_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2\right)}{1+\varepsilon_2} \\ \text{und} \qquad\qquad \delta_2 = \delta_2'\{1 + [\delta_2'']\} \end{cases}$$

als verbesserter zweiter Näherungswert ergibt. Auch jetzt ist es nicht nötig, die Näherung von $[\delta]$ noch weiter zu treiben, bevor an Stelle von (45b) eine genauere Gleichung getreten ist. Indem wir

$$(47\text{b})\qquad q = q_2 = q_0 + \delta_2,$$

setzen, erhalten wir diese in der Form

$$(45\text{c})\qquad \delta_3' = -\frac{4}{9}\frac{\sin w}{\mathfrak{Sin}\, q_2 w}.$$

Mit dem hieraus berechneten vorläufigen dritten Näherungswert δ_3' und dem vorher gefundenen schon verbesserten Werte $[\delta_2'']$ ergibt sich der Zwischenwert

$$(42c) \qquad \delta_3'' = \delta_3' \{1 + [\delta_2'']\}.$$

Verfahren wir hiermit wieder nach (46a), so wird

$$(46c) \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\delta_3''; & [\delta_3''] = \dfrac{\varepsilon_3\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_3 - \varepsilon_3{}^2\right)}{1 + \varepsilon_3} \\ \text{und} & \delta_3 \quad = \delta_3' \{1 + [\delta_3'']\} \end{array} \right.$$

als verbesserter dritter Näherungswert. In dieser Weise läßt sich die Rechnung leicht beliebig weit fortsetzen. Die zu erreichende Genauigkeit ist nur durch die Stellenzahl begrenzt, mit der die Sinus und Sinus in den vorhandenen Tafeln angegeben sind. Durch die Bezeichnung der einzelnen Näherungsstufen mit den Zeigern 1, 2, 3 ...., der vorläufigen Werte jeder Stufe mit einem Strich und der Zwischenwerte mit zwei Strichen wird die Form der Rechnung so regelmäßig, daß sie bequem in einem feststehenden Rahmen (Vordruck) durchgeführt werden kann. Ein Zahlenbeispiel soll dies später im einzelnen erläutern. Hier möge nur noch bemerkt werden, daß die Näherung um so schneller fortschreitet, je größer w ist, oder je weniger es sich von π oder einem ganzen Vielfachen von π unterscheidet. Ist w einem solchen gleich, so ist $\delta = 0$. In den Fällen der langsameren Näherung läßt sich eine Abkürzung erreichen, wenn man die Rechnung nicht mit q_0 (nach Gleichung (45a)), sondern mit einem genaueren Werte von q beginnt. Wie sich ein derartiger Wert bestimmen läßt, wird im folgenden Abschnitte gezeigt werden.[11])

C. Berechnung von δ und w für die Berührungspunkte.

Es ist schon früher erwähnt, daß q als Funktion von w aufgefaßt einen wellenförmigen Verlauf hat. Für die genauere Darstellung dieser Wellenlinie würde es sehr förderlich sein, die den höchsten und tiefsten Punkten der Wellenberge und Wellentäler (Halbwellen) entsprechenden Werte von q und w zu kennen. Die betreffenden Punkte sind offenbar durch die Bedingung bestimmt, daß q zu einem Größtwert oder Kleinstwert wird in Bezug auf w. Wenn man aber die Abbildung 3 betrachtet und sie sich nach rechts weiter fortgesetzt denkt, so erkennt man, daß die größten Ausschläge von q zu denjenigen Kurven k Sin qw gehören, die die aufeinander folgenden Halbwellen der Kurve sin w gerade berühren. Der erste dieser Berührungspunkte ist in Abb. 3 noch sichtbar. Ihm entspricht (nach Abschnitt IV) der überhaupt größte Wert von q, nämlich $q_g = 0{,}6330\,6087$. So wie dieser, sind auch die folgenden Größt- und Kleinstwerte von q nebst den zugehörigen w durch die Gleichungen (34) zu bestimmen.

---

11) Vergl. auch das erste Beispiel im achten Abschnitte.

Ich habe schon früher darauf hingewiesen, daß hierzu geeignete bequeme Hilfsmittel nicht bekannt zu sein scheinen, und daß deshalb erst ein besonderes Verfahren dafür entwickelt werden mußte.[12]) Dieses jetzt weiter anzuwenden, würde aber nicht zweckmäßig sein, weil sich für größere Werte von w ein zwar nicht mehr so allgemeiner, dafür aber wesentlich kürzerer Weg zur Bestimmung der gesuchten Größen finden läßt, der zugleich den Vorzug hat, sich eng an den unter B entwickelten Rechnungsgang anzuschließen. Das dort dargestellte Verfahren beruht offenbar auf dem Umstande, daß für q ein Mittelwert q_0 angegeben werden konnte, von dem die einzelnen Werte nur um einen verhältnismäßig kleinen Betrag δ abweichen. Die Größe w war dabei ganz willkürlich. Jetzt ist dagegen auch w durch die Bedingungen der Aufgabe bestimmt, und ein Rechnungsverfahren solcher Art hat daher nur Aussicht auf Erfolg, wenn auch für w ein Näherungswert von vornherein angenommen werden kann; d. h. es muß für jeden Ort eines Größt- oder Kleinstwertes von q der zugehörige Wert von w annähernd bekannt sein. Es handelt sich also eigentlich um eine unbegrenzte Reihe von Näherungswerten, die zu ermitteln sind, bevor die genauere Berechnung überhaupt beginnen kann. Die scheinbar hieraus entspringenden großen Schwierigkeiten lassen sich nur dank einer besonderen Eigenart der vorliegenden Aufgabe überwinden, und zwar in folgender Weise.

Nach (34) gelten für jeden Berührungspunkt der Kurven $\sin w$ und $k \operatorname{Sin} qw$ die beiden Gleichungen

$$\sin w = k \operatorname{Sin} qw$$

und

$$\cos w = kq \operatorname{Cos} qw.$$

Teilt man die erste durch die zweite, so folgt

$$\tag{48} \operatorname{tang} w = \frac{1}{q} \operatorname{Tang} qw.$$

Wie unter B gezeigt wurde, nähert sich q mit wachsendem w dem Werte $q_0 = 1 : \sqrt{3}$; ferner geht $\operatorname{Tang} qw$ bekanntlich mit zunehmendem qw gegen die Grenze 1.[13]) Bezeichnet man den entsprechenden Wert von w mit w_0, so ist

$$\tag{49} \operatorname{tang} w_0 = \frac{1}{q_0} = \sqrt{3}.$$

Nun ist aber $\sqrt{3}$ der Zahlenwert der Tangente eines Winkels von 60° alter Teilung. Daraus folgt, wenn mit m eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet wird, das wichtige Ergebnis

$$\tag{50} w_0 = \left(m + \frac{1}{3}\right)\pi,$$

[12]) S. Fußanmerkung 5.

[13]) Schon für $qw = 7{,}65$ ist auf 7 Stellen genau $\operatorname{Tang} qw = 1$.

das den Schlüssel zur Lösung der vorliegenden Aufgabe bildet. Es besagt, daß sich die Berührungspunkte zwischen der Sinuslinie und den Kurven $k\,\mathfrak{Sin}\,q w$ mit wachsendem w immer mehr dem Punkte nähern, der um $^1/_3\,\pi$ hinter dem vorhergehenden Nullpunkte oder um $^1/_6\,\pi$ vor dem folgenden Scheitelpunkte der zugehörigen Halbwelle der Sinuslinie liegt und den Abstand $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ von der w-Achse hat. Die Gleichung (50) wird um so ungenauer, je kleiner w; der größte Fehler entsteht also mit $m = 1$, d. h. für den Berührungspunkt in der ersten (überhaupt in Betracht kommenden) Halbwelle der Sinuslinie. Er ist

$$w_0 - w_g = 4{,}188\,7902 - 4{,}143\,2405 = 0{,}045\,5497.$$

Hiernach liefert die Gleichung (50) brauchbare Anfangswerte für die näherungsweise Berechnung von w. Die Zahl m bestimmt die Ordnungsnummer des Wellenberges oder Wellentales, in dem der größte oder kleinste Wert von q gesucht wird. Bemerkenswert ist noch, daß der aus (50) folgende Wert w_0 bei geradem m kleiner, bei ungeradem m größer ist, als der genaue Wert von w.

Die Aufgabe, aus den Anfangswerten q_0 und w_0 durch fortschreitende Näherung die q und w für die Berührungspunkte zu bestimmen, kann jetzt nach dem Vorbilde des unter B geschilderten Rechnungsverfahrens in folgender Weise gelöst werden.

Erste Stufe: Mit $w_0 = \left(m + \frac{1}{3}\right)\pi$ und $q_0 = 1 : \sqrt{3}$ wird nach (48) zunächst

$$\text{(48 a)} \qquad \operatorname{tang} w_1 = \frac{1}{q_0}\,\mathfrak{Tang}\, q_0 w_0.$$

Hiermit folgt aus (43) und (44)

$$\text{(49 a)} \qquad \delta_1{}' = -\frac{4}{9}\,\frac{\sin w_1}{\mathfrak{Sin}\, q_0 w_1}$$

als vorläufiger erster Näherungswert von δ. Dann wird genau so, wie früher

$$\text{(46 a)} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\delta_1{}'; \quad [\delta_1{}'] = \dfrac{\varepsilon_1\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_1{}^2\right)}{1 + \varepsilon_1} \\ \text{und} \qquad\qquad\quad \delta_1 = \delta_1{}'\left\{1 + [\delta_1{}']\right\} \end{cases}$$

als verbesserter erster Näherungswert. Hieraus folgt dann wie unter B:

$$\text{(47 a)} \qquad q_1 = q_0 + \delta_1.$$

Zweite Stufe: Die wiederholte Anwendung von (48) ergibt

$$\text{(48 b)} \qquad \operatorname{tang} w_2 = \frac{1}{q_1}\,\mathfrak{Tang}\, q_1 w_1,$$

womit ähnlich wie vorher

$$(49\text{b})\qquad \delta_2' = -\frac{4}{9}\,\frac{\sin w_2}{\mathfrak{Sin}\, q_1 w_2}$$

als vorläufiger zweiter Näherungswert von δ folgt. Nun ist mit dem zuvor gefundenen $[\delta_1']$ der Zwischenwert

$$(42\text{b})\qquad \delta_2'' = \delta_2'\{1 + [\delta_1']\}$$

und dann wie früher

$$(46\text{b})\quad \begin{cases} \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\delta_2''; \quad [\delta_2''] = \dfrac{\varepsilon_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2\right)}{1+\varepsilon_2} \\ \text{und} \qquad \delta_2 = \delta_2'\{1 + [\delta_2'']\} \end{cases}$$

als verbesserter zweiter Näherungswert von δ zu berechnen. Dies ergibt

$$(47\text{b})\qquad q_2 = q_0 + \delta_2.$$

Dritte Stufe: Die Formeln bleiben dieselben, wie vorher, nur sind alle Zeiger (mit Ausnahme von q_0) um eine Einheit zu erhöhen. Das Gleiche gilt für alle folgenden Stufen.

Die Rechnung kann beliebig weit fortgesetzt werden; die zu erreichende Genauigkeit ist auch hier (wie bei B) nur durch die Stellenzahl der Tafeln der Sinus, Sinus und Tangenten begrenzt. Die in den Fällen B und C übereinstimmenden Gleichungen sind mit denselben Nummern und Buchstaben bezeichnet.

VI. Abgekürzte Berechnung von δ.

Wenn w genügend groß ist, so führt das im vorigen Abschnitte entwickelte Rechnungsverfahren sehr schnell zu genauen Werten von q, weil dann δ sehr klein ist und die aufeinander folgenden Näherungswerte dieser Größe sich nur wenig voneinander unterscheiden. In diesem Falle können aber die höheren Potenzen von δ gegen die Einheit vernachlässigt werden. Ferner darf man

$$(51)\qquad \mathfrak{Sin}\, qw = \frac{1}{2} e^{qw}$$

setzen. Hierdurch wird es möglich, für δ eine einfache, geschlossene Formel aufzustellen, die diesen Wert bei sehr großem w ohne weiteres, bei mittlerem w nach Anfügung eines Berichtigungsgliedes hinlänglich genau ergibt, und bei kleinerem w wenigstens einen Näherungswert liefert, der nach dem unter V dargestellten Verfahren weiter verbessert werden kann und dazu geeignet ist, die Rechnung etwas abzukürzen.

Bezeichnet man den gesuchten Näherungswert mit δ, so wird nach (37)

$$q = q_0 + \delta$$

womit nach (51) $\mathfrak{Sin}\, qw = \frac{1}{2} e^{(q_0+\delta)w} = \frac{1}{2} e^{q_0 w} e^{\delta w}$ wird. Bei genügend kleinem δ läßt sich $e^{\delta w}$ durch die bekannte Reihe für e^x ausdrücken. Wir nehmen an, daß die beiden ersten Glieder hierzu ausreichen. Dann wird

$$\mathfrak{Sin}\, qw = \frac{1}{2} e^{q_0 w} (1 + \delta w). \tag{52}$$

Wenn ferner in (41) die Glieder mit ε gegen das erste Glied vernachlässigt werden, so ergibt sich

$$1 + [\delta] = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\,\delta \,. \tag{53}$$

Setzt man diesen Wert in (42), und den Wert von $\mathfrak{Sin}\, qw$ aus (52) in (44) ein, so folgt

$$\delta = -\frac{8}{9}\frac{\sin w}{e^{q_0 w}} \frac{1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\,\delta}{1 + w\delta} \tag{55}$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades in δ, die in der üblichen Weise aufgelöst werden könnte. Da aber der auf der rechten Seite stehende Ausdruck in δ nach den gemachten Annahmen sehr nahe der Einheit gleich ist, so zerlegt man die Rechnung besser in zwei Teile, indem man zuerst einen vorläufigen Näherungswert

$$\delta' = -\frac{8}{9}\frac{\sin w}{e^{q_0 w}} \tag{56}$$

und dann damit einen genaueren Wert

$$\delta'' = \delta' \frac{1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}\,\delta'}{1 + w\delta'} \tag{57}$$

bestimmt. Statt hierin mit $1 + w\delta'$ zu teilen, kann man auch mit $1 - w\delta'$ vervielfachen, womit sich

$$\delta'' = \delta' - \left(w - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)\delta'^2 \tag{58}$$

ergibt. Das zweite Glied auf der rechten Seite läßt sofort erkennen, ob eine Berichtigung des Wertes δ' nötig ist, oder ob dieser schon genügt.

Die Rechnung nach (56) wird natürlich am besten logarithmisch geführt. Mit

$$q_0 \log e = 0.25074\,00360 \tag{59}$$

ergibt sich

$$\log \delta' = \log \sin w - 0.2507\,4004\, w + 9.9488\,4748 - 10. \tag{60}$$

Ferner wird nach Einsetzung des Zahlenwertes von $\sqrt{3}$ in (58)

$$(61) \qquad \delta'' = \delta' - (w - 0{,}433\,013)\,\delta'^2.$$

Die Gleichung (60) ist sehr geeignet zur tafelmäßigen Berechnung. Geht man nämlich von einem beliebigen Anfangswerte von w aus, und läßt man w stufenweise immer um π zunehmen, so bleibt $\log\sin w$ ungeändert. Die aufeinander folgenden Werte von $\log\delta'$ bilden mithin eine fallende arithmetische Reihe mit dem Unterschiede $0.2507\,4004\,\pi = 0.7877\,2305$, so daß bei Anwendung der Rechenmaschine eine Kurbeldrehung zur Bestimmung eines jeden dieser Werte genügt.

VII. Zahlenrechnung zum Abschnitt VI.

Näherungswerte von δ.

Die im vorigen Abschnitt entwickelten Formeln sollen nun dazu benutzt werden, q oder, was auf dasselbe hinausläuft, $\delta = q - q_0$ für eine Reihe von Werten der Unabhängigveränderlichen w zu berechnen. Wir wählen als solche die Werte, die sich ergeben, wenn man eine halbe Sinuswelle in sechs gleiche Teile teilt. Bezeichnet man die Ordnungsnummer der Halbwelle wie in Gleichung (50) mit m, so erhält man hiernach bei Ausdehnung des Verfahrens von $m = 1$ bis $m = 9$ die folgenden Zahlen.

VII Werte von w. Tafel 1.

$w:\pi =$	m	$m+\frac{1}{6}$	$m+\frac{2}{6}$	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m = 1$	3,141 593	3,665 191	4,188 790	4,712 389	5,235 988	5,759 587
2	6,283 185	6,806 784	7,330 383	7,853 982	8,377 580	8,901 179
3	9,424 778	9,948 377	10,471 976	10,995 574	11,519 173	12,042 772
4	12,566 371	13,089 969	13,613 568	14,137 167	14,660 766	15,184 364
5	15,707 963	16,231 562	16,755 161	17,278 760	17,802 358	18,325 957
6	18,849 556	19,373 155	19,896 753	20,420 352	20,943 951	21,467 550
7	21 991 149	22,514 747	23,038 346	23,561 945	24,085 544	24,609 142
8	25 132 741	25,656 340	26,179 939	26,703 538	27,227 136	27,750 735
9	28 274 334	28,797 933	29,321 531	29,845 130	30,368 729	30,892 328

Den Werten $m = m\pi$ entsprechen die Nullpunkte, den Werten $w = \left(m + \frac{3}{6}\right)\pi$ die Scheitelpunkte der Sinuswellen; den Werten $w = \left(m + \frac{2}{6}\right)\pi$ annähernd die Berührungspunkte der Sinuslinie mit den Kurven $k\,\mathfrak{Sin}\,k w$ (vergl. V, C).

Hiermit berechnen wir zunächst die ersten Näherungswerte δ' von δ nach Gleichung (60). Ordnet man die Ergebnisse in derselben Weise, wie die w in Tafel 1, so erhält man die folgende Zusammenstellung (Tafel 2).

VII — Werte von δ' nach Gl. (60). — Tafel 2.

$w:\pi=$	m	$m+\frac{1}{6}$	$m+\frac{2}{6}$	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m=1$	0	0,053 555 9	0,068 561 5	0,058 514 4	0,037 454 7	0,015 983 0
2	0	— 0,008 731 40	— 0,011 176 83	— 0,009 539 82	— 0,006 106 37	— 0,002 605 77
3	0	0,001 423 51	0,001 822 36	0,001 555 31	0,000 995 542	0,000 424 828
4	0	— 0,000 232 080	— 0,000 297 106	— 0,000 253 568	— 0,000 162 307	— 0,000 069 261 0
5	0	0,000 037 836 9	0,000 048 438 3	0,000 041 340 0	0,000 026 461 5	0,000 011 291 9
6	0	— 0,000 006 168 7	— 0,000 007 897 1	— 0,000 006 739 8	— 0,000 004 314 1	— 0,000 001 841 0
7	0	0,000 001 005 7	0,000 001 287 4	0,000 001 098 8	0,000 000 703 3	0,000 000 300 1
8	0	— 0,000 000 163 9	— 0,000 000 209 9	— 0,000 000 179 1	— 0,000 000 114 7	— 0,000 000 048 93
9	0	0,000 000 026 73	0,000 000 034 22	0,000 000 029 21	0,000 000 018 69	0,000 000 007 98

An diesen Werten sind nun noch die durch (61) bestimmten Berichtigungen anzubringen. Um deren Größenverhältnisse besser hervortreten zu lassen, berechnen wir nicht gleich die δ'', sondern die Werte $\delta''-\delta'$. Wird wieder dieselbe Reihenfolge eingehalten, wie vorher, so ergeben sich die in Tafel 3 zusammengestellten Ergebnisse.

VII — Werte von $\delta''-\delta'$ nach Gl. (61). — Tafel 3.

$w:\pi=$	m	$m+\frac{1}{6}$	$m+\frac{2}{6}$	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m=1$	0	— 0,008 924 4	— 0,017 654 7	— 0,014 652 3	— 0,006 737 9	— 0,001 360 9
2	0	— 0,000 485 83	— 0,000 861 63	— 0,000 675 37	— 0,000 296 24	— 0,000 057 50
3	0	— 0,000 019 28	— 0,000 033 34	— 0,000 025 55	— 0,000 010 987	— 0,000 002 095
4	0	— 0,000 000 682	— 0,000 001 163	— 0,000 000 881	— 0,000 000 375	— 0,000 000 070 8
5	0	— 0,000 000 022 6	— 0,000 000 038 3	— 0,000 000 028 8	— 0,000 000 012 2	— 0,000 000 002 3
6	0	— 0,000 000 000 7	— 0,000 000 001 2	— 0,000 000 000 9	— 0,000 000 000 4	— 0,000 000 000 1
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0

Fügt man diese Zahlen zu denen der vorhergehenden Tafel hinzu, so erhält man die folgende Tafel 4.

VII — Werte von δ'' nach Gl. (60) u. (61). — Tafel 4.

$w:\pi=$	m	$m+\frac{1}{6}$	$m+\frac{2}{6}$	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m=1$	0	0,044 631 5	0,050 906 8	0,043 862 1	0,030 716 8	0,014 622 1
2	0	— 0,009 217 23	— 0,012 038 46	— 0,010 215 19	— 0,006 402 61	— 0,002 663 27
3	0	0,001 404 23	0,001 789 02	0,001 529 76	0,000 984 555	0,000 422 733
4	0	— 0,000 232 762	— 0,000 298 269	— 0,000 254 449	— 0,000 162 682	— 0,000 069 331 8
5	0	0,000 037 814 3	0,000 048 400 0	0,000 041 311 2	0,000 026 449 3	0,000 011 289 6
6	0	— 0,000 006 169 4	— 0,000 007 898 3	— 0,000 006 740 7	— 0,000 004 314 5	— 0,000 001 841 1
7	0	0,000 001 005 7	0,000 001 287 4	0,000 001 098 8	0,000 000 703 3	0,000 000 300 1
8	0	— 0,000 000 163 9	— 0,000 000 209 9	— 0,000 000 179 1	— 0,000 000 114 7	— 0,000 000 048 93
9	0	0,000 000 026 73	0,000 000 034 22	0,000 000 029 21	0,000 000 018 69	0,000 000 007 98

Diese Zahlen liefern das bemerkenswerte Ergebnis, daß der Wert von δ schon aus Gleichung (60) bis auf zehn Stellen nach dem Komma genau erhalten wird, wenn $m \geqq 7$ ist; für alle über diese Grenze hinausgehenden Werte von m kommt also selbst bei schärfster Rechnung die Berichtigung nach (61) nicht mehr in Betracht. Wollte man δ nur bis auf fünf Stellen nach dem Komma berechnen, so fiele das Berichtigungsglied offenbar schon von $m \geqq 4$ an fort. Aus dem mehrfach erwähnten Grunde soll es jedoch beibehalten werden. Es wird damit die Möglichkeit geboten, δ auf so viele Stellen genau zu berechnen, wie in der Zahlentafel für δ'' angeführt sind. Dazu gehört dann aber noch die Prüfung der Frage, bis zu welchem kleinsten Werte von m die Rechnung nach (60) und (61) überhaupt hierzu ausreicht. Um dies zu entscheiden, müssen wir auf die genaueren Gleichungen des Abschnittes V zurückgreifen.

VIII. Zahlenrechnung zum Abschnitt V.

Genaue Werte von δ.

Es würde zu viel Raum in Anspruch nehmen und dürfte auch nicht nötig sein, die Näherung für sämtliche Punkte durch alle Stufen hindurch hier vorzuführen. Wir wollen uns vielmehr mit der Darstellung je eines Beispieles zu den beiden Fällen B und C des fünften Abschnittes begnügen und dann für die übrigen Lösungen gleich die Schlußwerte angeben.

Die näherungsweise Berechnung von δ schreitet um so langsamer voran, je größer δ, also je kleiner w ist und je näher der zugehörige Schnittpunkt der Kurven $\operatorname{Sin} w$ und $k \operatorname{Sin} qw$ dem Berührungspunkte in der betreffenden Sinushalbwelle liegt. Am ungünstigsten ist also der Fall des ersten Berührungspunktes, der im vierten Abschnitte schon in anderer Weise behandelt worden ist. Um nach dem unter C entwickelten Verfahren die Werte w_g und q_g mit derselben Schärfe zu erhalten wie früher, ist eine zehnmalige Wiederholung der Näherung erforderlich; es wäre daher nicht zweckmäßig, diesen Fall als Beispiel zu wählen. Dagegen empfiehlt sich als solches die Berechnung der zum vierten Berührungspunkte ($m = 4$) gehörenden Werte von w und δ, die nur eine dreimalige Näherung erfordern. Das genügt zur Erläuterung des Verfahrens. Von den in Betracht kommenden Schnittpunkten sind die Scheitel der Sinuslinie für die Näherung am ungünstigsten; es möge daher als Beispiel zu den Entwicklungen in V B die Berechnung eines dieser Punkte dienen; und zwar der Scheitel der dritten Halbwelle ($m = 3$), bei dem eine zweimalige Näherung ausreicht. Wir beginnen mit diesem Falle als dem einfacheren.

1. Beispiel.

Berechnung von δ für $w = \left(3 + \frac{3}{6}\right)\pi = 10{,}995\,574.$

Als Ausgangswert von q soll nicht q_0, sondern der Andeutung am Schlusse von V B gemäß gleich der nach dem vorigen Abschnitte zu berechnende verbesserte Wert

$$q = q_0 + \delta''$$

benutzt werden. Der Wert von δ'' ist mit $m = 3$ aus der dort gegebenen Tafel 4 zu entnehmen.

Man findet $\delta'' = 0{,}001\,529\,76$

Es ist $1 : \sqrt{3} = q_0 = 0{,}577\,350\,27$

also $q = 0{,}578\,880\,03$

und $qw = 6{,}365\,118.$

Dazu gehört $\log \mathfrak{Sin}\, qw = 2.463\,305$

Mit $\sin w = -1$ ist $\log \frac{4}{9} \sin w = 9.647\,817$

Also wird nach (45a) $\log \delta_1' = 7.184\,512$

und $\delta_1' = 0{,}001\,529\,37$

als vorläufiger erster Näherungswert von δ. Dieser ist nun nach (46a) zu verbessern. Man findet

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\delta_1' = 0{,}001\,3245 \text{ und } \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 = 0{,}498\,011$$

$$\varepsilon_1\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2\right) = 0{,}000\,659\,6$$

$$[\delta_1'] = \frac{\varepsilon_1\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2\right)}{1 + \varepsilon_1} = 0{,}000\,658\,7$$

und damit den verbesserten ersten Näherungswert

$\delta_1\{1 + [\delta_1']\} = \quad \delta_1 = 0{,}001\,530\,38.$

Hierzu nach (47a) $q_0 = 0{,}577\,350\,27$

ergibt den genaueren Wert $q_1 = 0{,}578\,880\,65$

und $q_1 w = 6{,}365\,125.$

Damit wird $\log \mathfrak{Sin}\, q_1 w = 2.463\,308.$

Dies von $\log \frac{4}{9} \sin w = 9.647\,817$

liefert nach (45b) $\log \delta_2' = 7.184\,509$

und $\delta_2' = 0{,}001\,529\,36$

als vorläufigen zweiten Näherungswert von δ. Mit dem vorher berechneten Werte von $[\delta_1']$ ergibt sich jetzt nach (42b) der Zwischenwert

$$\delta_2'' = 0{,}001\,529\,36\,.\,1{,}000\,6587 = 0{,}001\,530\,37,$$

der nach (46b) weiter zu behandeln ist. Man erhält

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\delta_2'' = 0{,}001\,3253 \text{ und } \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 = 0{,}498\,010 \quad ;$$

$$\varepsilon_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2\right) = 0{,}000\,660\,0 \quad ;$$

$$[\delta_2''] = \frac{\varepsilon_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2\right)}{1 + \varepsilon_2} = 0{,}000\,659\,1 \quad ;$$

$$\text{also} \qquad \delta_2'\{1 + [\delta_2'']\} = \qquad \delta_2 = 0{,}001\,530\,37.$$

als verbesserten zweiten Näherungswert von δ. Durch eine weitere Fortsetzung des Verfahrens wird diese Zahl nicht mehr geändert; sie ist also auf acht Stellen nach dem Komma genau. Die Beschränkung auf die erste Näherung hätte hiernach, wie der Vergleich mit δ_1 zeigt, nur einen Fehler von einer Einheit der achten Stelle zurfolge gehabt; und die abgekürzte Berechnung nach (61) ergibt $\delta = \delta''$ auch immer noch auf sechs Stellen nach dem Komma genau. Für die folgende Halbwelle ($m = 4$) erstreckt sich die Genauigkeit dieser Berechnung schon bis auf die achte Stelle.

2. Beispiel.

Berechnung von w und δ für den vierten Berührungspunkt ($m = 4$).

Erste Stufe. Es ist $w_0 = \left(m + \frac{1}{3}\right)\pi = 13{,}613\,568$

$$q_0 = 1 : \sqrt{3} = 0{,}577\,350\,27$$

$$q_0 w_0 = 7{,}859\,797$$

$$\log \mathfrak{Tang}\, q_0 w_0 = 0.0$$

$$-\log q_0 = 9.761\,439.$$

Hiermit nach (48a) $\quad \log \operatorname{tang} w_1 = 0.238\,561.$

Bei der Berechnung des Zahlenwertes von w_1 ist zu berücksichtigen, daß die Tafeln nur den kleinsten Wert des Winkels ergeben, der zu einer Winkelfunktion (oder ihrem Logarithmus) gehört. Im vorliegenden Falle ist zu diesem Werte oder auch gleich zu dem entsprechenden Bogen das aus der Aufgabe folgende Vielfache von π hinzuzufügen. Mit Benutzung der für solche Rechnungen besonders empfehlenswerten Tafeln neuer Teilung ergibt sich zu vorstehendem log tang der kleinste Winkel

in Graden = $66^0\,66'\,66{,}7''$ und in Bogen	=	1,047 198.
Hierzu der Bogen	4π =	12,566 371
so folgt	w_1 =	13,613 569[14])
womit	$q_0 w_1$ =	7,859 798.
Nun wird in (49a)	$\log \sin w_1$ =	9.937 531
	$\log \frac{4}{9}$ =	9.647 817
	$\log \frac{4}{9} \sin w_1$ =	9.585 348
	$\log \mathfrak{Sin}\, q w_1$ =	3.112 437
	$\log \delta_1'$ =	6.472 911
	δ_1' =	— 0,000 297 11.

Dies ist der vorläufige erste Näherungswert von δ, der nun nach (46a) verbessert werden muß. Man findet

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\delta_1' = 0{,}000\,2573 \text{ und } \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 = 0{,}500\,385\,9$$

$$\varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2\right) = -0{,}000\,128\,7$$

$$[\delta_1'] = \frac{\varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2\right)}{1+\varepsilon} = -0{,}000\,128\,8$$

also $\delta_1'\{1 + [\delta_1']\}$ =	δ_1 =	— 0,000 297 02.
Hierzu nach (47a)	q_0 =	0,577 350 27
ergibt den genaueren Wert	q_1 =	0,577 053 25
und	$q_1 w_1$ =	7,855 751.

[14]) Bis hierher hätte die Rechnung eigentlich entbehrt werden können, da sie nur bestätigt, was schon in der Fußanmerkung 13 zu zu Gl. (48) erwähnt wurde, nämlich daß auf sieben Stellen genau $\mathfrak{Tang}\, q w = 1$ wird, wenn $q w > 7{,}65$ ist, und daß dann nach (49) und (50) mit ähnlicher Genauigkeit $w = \left(m + \frac{1}{3}\right)\pi = w_0$ ist. (Der oben zur Erscheinung kommende kleine Unterschied zwischen w_0 und w_1 entspringt lediglich aus der ungenügenden Schärfe der Rechnung.) Diese Beziehung gilt aber nicht mehr, wenn $m < 3$ ist; der Vollständigkeit halber wurde deshalb das Beispiel so vorgeführt, daß man daraus ersehen kann, wie sich die Rechnung im allgemeineren Falle gestaltet.

Zweite Stufe. Nach (48b):	$\log \mathfrak{Tang}\, q_1 w_1 =$	0.0
	$-\log \quad q_1 =$	9.761 215
	$\log \text{tang} \quad w_2 =$	0.238 785.
Zugehöriger kleinster Winkel in Graden $= 66^g\, 68'\, 08{,}9''$ und in Bogen	$=$	1,047 421.
Hierzu der Bogen	$4\pi =$	12,566 371
so folgt	$w_2 =$	13,613 792
	womit $q_1 w_2 =$	7,855 880.
Hiermit nach (49 b):	$\log \sin w_2 =$	9.937 586
	$\log \frac{4}{9} =$	9.647 817
	$\log \frac{4}{9} \sin w_2 =$	9.585 403
	$\log \mathfrak{Sin}\, q_1 w_2 =$	3.110 737
	$\log \delta_2' =$	6.474 666
	$\delta_2' =$	$-$ 0,000 298 31.

Dies ist der vorläufige zweite Näherungswert von δ. Mit den zuvor gefundenen $[\delta_1']$ ergibt sich hieraus nach (42b) der Zwischenwert

$$\delta_2'' = -0{,}000\,298\,31\,(1 - 0{,}000\,128\,8) = -0{,}000\,298\,27$$

der nach (46b) weiter zu behandeln ist. Man erhält

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\delta_2'' = -0{,}000\,258\,3 \text{ und } \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 = 0{,}500\,387\,4$$

$$\varepsilon_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2\right) = -0{,}000\,129\,26$$

$$[\delta_2''] = \frac{\varepsilon_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2\right)}{1+\varepsilon_2} = -0{,}000\,129\,29$$

$\delta_2'\{1 + [\delta_2'']\} =$	$\delta_2 =$	$-$ 0,000 298 27.
Hierzu nach (47b)	$q_0 =$	0,577 350 27
ergibt den genaueren Wert	$q_2 =$	0,577 052 00
	und $q_2 w_2 =$	7,855 866.

Dritte Stufe.	$\log \mathfrak{Tang}\, q_2 w_2 =$	0.0
	$-\log \quad q_2 =$	9.761 215
	$\log \text{tang} \quad w_3 =$	0.238 785.

Hiernach erhält man für w_3 denselben Wert wie für w_2, so daß $q_2 w_3 = q_2 w_2 = 7{,}855\,866$. Damit wird,

wie in der zweiten Stufe:	$\log \frac{4}{9} \sin \quad w_3 =$	9.585 403
dagegen	$\log \quad \mathfrak{Sin}\, q_2 w_3 =$	3.110 730
und hiermit	$\log \quad \delta_3' =$	6.474 673
	$\delta_3' =$	— 0,000 298 314.
Daraus folgt, ähnlich wie in der zweiten Stufe, der verbesserte Wert	$\delta_3 =$	— 0,000 298 275.

In den Grenzen der zu der Rechnung benutzten Stellenzahl stimmt jetzt δ_3 mit δ_2 so genau überein, daß die Näherung als abgeschlossen zu betrachten ist.

Es soll nun noch ermittelt werden, wie groß der Fehler von w und δ wird, wenn man nach (50)

$$w = \left(m + \frac{1}{3}\right)\pi$$

setzt und damit nach (61) den zugehörigen Wert von δ berechnet. Es ergibt sich aus den Zahlentafeln 1 und 4 im siebenten Abschnitt

$$w = 13{,}613\,568 \text{ und } \delta'' = -0{,}000\,298\,269,$$

während bei der vorstehenden genaueren Berechnung

$$w_3 = 13{,}613\,792 \text{ und } \delta_3 = -0{,}000\,298\,275$$

gefunden wurden. Der Fehler, der mit der Rechnung nach (60) und (61) begangen wird, ist hiernach für $m = 4$

$$\text{bei } w \text{ rund } \frac{2}{136\,000} \text{ und bei } \delta \text{ rund } \frac{6}{298\,000}$$

des wahren Wertes. Für größere Werte von m sind die Fehler noch viel kleiner. Es können also auch die zu den Berührungspunkten gehörigen Werte von w und δ nach dem im sechsten Abschnitte entwickelten einfachen Verfahren für alle Zwecke genau genug berechnet werden, wenn $m \geqq 4$ ist.

Diese beiden Beispiele und die daran geknüpften Vergleiche ermöglichen schon ein Urteil über die Brauchbarkeit und das Anwendungsgebiet der verschiedenen, in den Abschnitten V und VI entwickelten Verfahren zur Berechnung von $\delta = q - q_0$ als Funktion von w, sowohl für die Schnittpunkte, wie für die Berührungspunkte der Kurven $\sin w$ und $k\,\mathfrak{Sin}\,qw$. Sie zeigen insbesondere auch, daß q nach diesem Verfahren wegen der Kleinheit von δ mit einer gegebenen Stellenzahl der Sinus und Sinus genauer berechnet werden kann, als auf dem im Abschnitt IV eingeschlagenen Wege der durch sehr große Zahlen dargestellte Wert von w. Zur Vervollständigung des Bildes lassen wir nun noch eine Zusammenstellung der genauen

VIII Genaue Werte von δ nach VB u. VC. — Werte von w

$w:\pi=$	m	$m+\frac{1}{6}$	Berührungspunkte	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$	f. d. Berührungspunkte
$m=1$	0	0,046 421 3	0,055 710 6	0,047 679 9	0,032 105 4	0,014 694 4	4,143 240 5
2	0	— 0,009 265 35	— 0,012 156 2	- 0,010 297 0	— 0,006 426 24	— 0,002 665 32	7,339 334 5
3	0	0,001 404 62	0,001 789 88	0,001 530 37	0,000 984 735	0,000 422 749	10,470 629
4	0	— 0,000 232 766	— 0,000 298 275	— 0,000 254 453	— 0,000 162 684	— 0,000 069 331 8	13,613 792
5	0	0,000 037 814 3	0,000 048 399 9	0,000 041 311 2	0,000 026 449 3	0,000 011 289 6	16,755 125
6	0	— 0,000 006 169 4	— 0,000 007 898 3	— 0,000 006 740 7	— 0,000 004 314 5	— 0,000 001 841 1	19,896 759
7	0	0,000 001 005 7	0,000 001 287 4	0,000 001 098 8	0,000 000 703 3	0,000 000 300 1	23,038 345
8	0	— 0,000 000 163 9	— 0,000 000 209 9	— 0,000 000 179 1	— 0,000 000 114 7	— 0,000 000 048 93	26,179 939
9	0	0,000 000 026 73	0,000 000 034 22	0,000 000 029 21	0,000 000 018 69	0,000 000 007 98	29,321 531

Werte von δ folgen. Die zugehörigen w ergibt für die Schnittpunkte die Tafel 1 des vorigen Abschnittes, für die Berührungspunkte die letzte Spalte rechts. Sie gestattet durch Vergleich mit Tafel 4 jenes Abschnittes eine lückenlose Bestimmung der Genauigkeitsgrenzen des abgekürzten Berechnungsverfahrens nach Gl. (60) und (61).

IX. Einführung von δ in n, S und p. Geschlossene Lösung für verschwindendes δ. Zahlentafeln.

Nachdem die Aufgabe, aus der Gleichung (24) die Größe q als Funktion von w zu bestimmen, in den Abschnitten V und VI allgegemein, und danach in den Abschnitten VII und VIII für eine Reihe willkürlich angenommener w zahlenmäßig gelöst ist, könnten jetzt die entsprechenden Werte von n, S und p ohne weiteres durch Einsetzung dieser w und der zugehörigen $q = q_0 + \delta$ in die Gleichungen (25), (26) oder (28) und (27) berechnet werden. Es empfiehlt sich jedoch, die Zerlegung von q in zwei Teile — nämlich den unveränderlichen Mittelwert $q_0 = 1 : \sqrt{3}$ und das veränderliche Glied δ —, die sich bei den vorhergehenden Entwicklungen und Rechnungen als so nützlich erwiesen hat, noch weiter beizubehalten. Wir werden sehen, daß dann die Gesetze, nach denen sich die Größen n, S und p mit stetig wachsendem w ändern, viel deutlicher hervortreten, als bei der Einführung von q. Auch wird die Zahlenrechnung durch die Abtrennung von δ sehr erleichtert.

Mit $q = q_0 + \delta$ ergibt sich aus (25)

$$n = \frac{1 + q^2}{1 - q^2} = \frac{1 + q_0^2 + (2\,q_0 + \delta)\,\delta}{1 - q_0^2 - (2\,q_0 + \delta)\,\delta}.$$

Da $q_0 = 1 : \sqrt{3}$, so ist $1 + q_0^2 = 4:3$ und $1 - q_0^2 = 2:3$. Hiermit folgt, wenn man im Zähler und Nenner mit $2:3$ teilt und zur Abkürzung den später noch mehrfach vorkommenden Ausdruck

$$3\left(q_0 + \frac{1}{2}\,\delta\right)\delta = (\delta) \tag{62}$$

setzt,

$$\boldsymbol{n = \frac{2 + (\delta)}{1 - (\delta)} = 2\,\frac{1 + {}^1\!/_2\,(\delta)}{1 - \quad (\delta)}}. \tag{63}$$

Ferner folgt mit $q = q_0 + \delta$ aus (28)

$$\frac{S}{K} = \frac{1 - q^2}{2}\left(\frac{w}{{}^1\!/_2\,\pi}\right)^2 = \left(\frac{w}{{}^1\!/_2\,\pi}\right)^2\left[\frac{1 - q_0^2}{2} - \frac{(2\,q_0 + \delta)\,\delta}{2}\right].$$

Da $(1 - q_0^2) : 2 = 1 : 3$ ist, so läßt sich dies mit Benutzung von (62) auf die Form

$$\boldsymbol{\frac{S}{K} = \frac{1}{3}\left(\frac{w}{{}^1\!/_2\,\pi}\right)^2 [1 - (\delta)]} \tag{64}$$

bringen. Wird w (wie es im siebenten Abschnitt geschehen ist) nach gleichen Teilen von $^1/_2\,\pi$ fortschreitend angenommen, so gestaltet sich die Berechnung des vor der eckigen Klammer stehenden Ausdruckes besonders einfach.

Weiter ergibt sich mit $q = q_0 + \delta$ aus (27)

$$\frac{pl^4}{EJ} = \left(\frac{1+q^2}{4}w^2\right)^2 = w^4\left[\frac{1+q_0{}^2}{4} + \frac{(2\,q_0+\delta)\delta}{4}\right]^2.$$

Da $(1+q_0{}^2):4 = 1:3$ ist, so folgt hieraus mit Rücksicht auf (62)

$$(65) \qquad \frac{pl^4}{EJ} = \frac{1}{9}w_4\left[1+\frac{1}{2}(\delta)\right]^2.$$

Die vor der eckigen Klammer stehende Größe läßt sich aus dem entsprechenden Gliede von (64) leicht mit Hilfe der Beziehung

$$(66) \qquad \frac{1}{9}w^4 = \frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(\frac{w}{^1/_2\pi}\right)^4 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left[\frac{1}{3}\left(\frac{w}{^1/_2\pi}\right)^2\right]^2$$

berechnen.[15])

Mittels der Gleichungen (64) und (65) kann hiernach für ein beliebig angenommenes w ein Paar zusammengehöriger Werte der Größen $S:K$ und $pl^4:EJ$ bestimmt werden. Dagegen ist es nicht möglich, die eine dieser Größen unmittelbar (d. h. durch eine von w freie Beziehung) durch die andere auszudrücken, weil (δ) Funktion von w ist und weil die beiden Gleichungen nicht allgemein nach w auflösbar sind. Wohl aber ist es bei Anwendung der später folgenden Zahlentafeln angängig, die eine Größe aus der anderen zu berechnen, ohne daß auf die Hilfsgröße w zurückgegriffen wird. Hierzu dient die grundlegende Beziehung (11), die schon im zweiten Abschnitte dazu benutzt wurde, die Gleichung (27) aus (26) abzuleiten. Um in diese Beziehung die Vergleichsgröße K einzuführen, setzen wir auf der rechten Seite von (11) für EJ den der Eulerschen Formel entsprechenden Wert

$$EJ = \frac{Kl^2}{(^1/_2\pi)^2}.$$

Damit ergibt sich dann sofort

$$(67) \qquad \frac{pl^4}{EJ} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{S}{K}\right)^2.$$

Nach dem vorher Ausgeführten bietet diese Gleichung sachlich nichts Neues.[16]) Immerhin kann sie zur besseren Veranschaulichung des gesetzmäßigen Zusammenhanges der Größen $S:K$ und $pl^4:EJ$ und — nachdem diese aus (64) und (65) berechnet sind — zur Anstellung einer Rechenprobe dienen. Ihr Hauptnutzen beruht aber darauf, daß n nur wenig veränderlich ist, also mittels der weiterhin

---

15) Es ist $(\pi:2)^4 = 6{,}08806\,81896$.

16) Die Gleichung (67) hätte natürlich auch leicht rückwärts aus den Gleichungen (63) bis (66) gefolgert werden können.

folgenden Zahlentafeln viel bequemer und genauer bestimmt werden kann, als die stark veränderlichen Größen $S:K$ und $pl^4:EJ$. Hierdurch wird die Möglichkeit geboten, $(n:2)^2$ aus den Tafeln unmittelbar als Funktion einer dieser Größen zu entnehmen und dann aus (67) die andere in einfacher Weise zu berechnen. Damit ist also die Hilfsgröße w und die Bestimmung von δ und (δ) in der Tat entbehrlich gemacht.

Obgleich sich nun aus diesen Tafeln die Werte aller wichtigeren Größen für den ganzen in Betracht kommenden Bereich von w ergeben, so wollen wir doch noch auf einen Fall etwas näher eingehen, der eine bedeutende Vereinfachung gestattet und dabei gerade für die Anwendung besonders wichtig ist. Die Größe δ nähert sich, wie bereits mehrfach hervorgehoben wurde, mit wachsendem w sehr schnell der Grenze Null und wird schon bei mäßig großem w so klein, daß sie in technischen Aufgaben gegen die Einheit vernachlässigt werden kann. So ergibt z. B. die Tafel für δ im achten Abschnitte als größten Wert im Bereiche der vierten Halbwelle der Sinuslinie mit $w = 13{,}613\ldots$ die Zahl $\delta = -0{,}000\,298\,275\ldots$ Diesem kleinen Betrage von δ entspricht nach Gl. (62) der Wert $(\delta) = 0{,}000\,516\,49\ldots$ Hieraus folgt, daß bei dem bezeichneten w nur ein Fehler von etwa 0,5 vom Tausend begangen wird, wenn man in (64) und (65) die Größe (δ) gegen 1 vernachlässigt, also

$$(68)\qquad \frac{S}{K} = \frac{1}{3}\left(\frac{w}{{}^1\!/_2\pi}\right)^2 \quad\text{und}\quad \frac{pl^4}{EJ} = \frac{1}{9}w^4 \qquad (69)$$

setzt. Diese Gleichungen weichen um so weniger von den genauen ab, je größer w, je größer also $S:K$ und $pl^4:EJ$. Sie gestatten die Ausschaltung der Hilfsgröße w, wodurch sich nunmehr die von w freie Beziehung

$$(70)\qquad \frac{pl^4}{EJ} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(\frac{S}{K}\right)^2$$

ergibt. Sie ist um so genauer, je größer die auf beiden Seiten stehenden Ausdrücke sind. Sie gilt außerdem in aller Strenge für diejenigen Werte von $S:K$ und $pl^4:EJ$, die sich aus (68) und (69) mit $w = m\pi$ ergeben, wo m eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet; denn für solche w ist $\delta = 0$.

Zu demselben Ergebnis hätte man natürlich auch von Gleichung (67) aus gelangen können. Mit dem vorher gefundenen (δ) folgt nämlich aus Gl. (63) der Wert $(n:2)^2 = 0{,}998\,451\,9\ldots$, wofür hinlänglich genau $(n:2)^2 = 1$ gesetzt werden kann. Man lernt so zugleich die Größe des Fehlers kennen, der der Gleichung (70) bei dem genannten Werte von w anhaftet: sie liefert bei gegebenem $S:K$ den Wert von $pl^4:EJ$ um rund 1,5 vom Tausend zu groß. Zur Vervollständigung des Bildes fehlt jetzt nur noch die Angabe des Zahlenwertes dieser beiden Größen. Man findet (wie auch die Tafeln ergeben) mit $w = 13{,}613\,792$

genau aus (64): $\frac{S}{K} = 25{,}050\,791$ u. aus (65): $\frac{pl^4}{EJ} = 3\,814{,}604\,7$;

genähert „ (68): $= 25{,}037\,859$ „ (69): $= 3\,816{,}575\,7$.

Bei den in der Wirklichkeit vorliegenden Aufgaben ist $S:K$ meist viel größer und die Rechnung nach (70) noch bedeutend genauer, als in dem hier als Beispiel gewählten Falle. In welchem Maße dies zutrifft, kann gleichfalls aus den Zahlentafeln leicht ersehen werden, ebenso, wie groß der Fehler bei kleineren Werten von $S:K$ ist.[17]

Mit der Gleichung (70) ist hiernach die Aufgabe, zu einem gegebenen Werte der Stabkraft S diejenige Größe der elastischen Querstützung p zu bestimmen, bei deren Vorhandensein der Stab sich gerade an der Knickgrenze befindet, — und ebenso die umgekehrte Aufgabe — allgemein in geschlossener Form gelöst. Voraussetzung ist nur, daß die Größe $S:K$ entweder eine gewisse, von der verlangten Genauigkeit abhängige und danach im Einzelfalle leicht festzusetzende Grenze nicht unterschreitet, oder daß (wie mit $w = m\pi$ aus (68) folgt) $S:K = 4\,m^2:3$, wo m eine beliebige positive ganze Zahl und K die Knickkraft des in der Querrichtung freien Stabes (mit $p = 0$) bedeutet. Ist p gegeben und S gesucht, so treten an Stelle dieser Bedingungen für $S:K$ die entsprechenden Bedingungen für $pl^4:EJ$.

[17] Vergl. hierzu auch den elften Abschnitt.

Werte von (δ) nach Gl. (62). Tafel 1.

$m:\pi =$	m	$m+\frac{1}{6}$	Berührungspunkte	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m = 1$	0	0,083 636 5	0,101 149 1	0,085 994 1	0,057 154 2	0,025 775 3
2	0	— 0,015 919 3	— 0,020 833 5	— 0,017 675 9	— 0,011 068 6	— 0,004 605 82
3	0	0,002 435 83	0,003 104 97	0,002 654 19	0,001 707 07	0,000 732 49
4	0	— 0,000 403 08	— 0,000 516 49	— 0,000 440 63	— 0,000 281 74	— 0,000 120 08
5	0	0,000 065 498	0,000 083 835	0,000 071 556	0,000 045 813	0,000 019 554
6	0	— 0,000 010 686	— 0,000 013 680	— 0,000 011 675	— 0,000 007 473	— 0,000 003 189
7	0	0,000 001 742	0,000 002 230	0,000 001 903	0,000 001 218	0,000 000 519 8
8	0	— 0,000 000 283 8	— 0,000 000 363 6	— 0,000 000 310 2	— 0,000 000 198 6	— 0,000 000 084 6
9	0	0,000 000 046 3	0,000 000 059 3	0,000 000 050 6	0,000 000 032 4	0,000 000 013 8

Werte von $(n:2)^2$ nach Gl. (63). Tafel 2.

$m:\pi =$	m	$m+\frac{1}{6}$	Berührungspunkte	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m = 1$	1	1,292 553	1,366 087	1,302 171	1,190 125	1,080 947
2	1	0,953 543	0,939 712	0,948 572	0,967 427	0,986 293
3	1	1,007 339	1,009 366	1,008 000	1,005 137	1,002 200
4	1	0,998 792	0,998 452	0,998 679	0,999 155	0,999 640
5	1	1,000 196 5	1,000 251 5	1,000 214 7	1,000 137 4	1,000 058 7
6	1	0,999 967 9	0,999 959 0	0,999 965 0	0,999 977 6	0,999 990 4
7	1	1,000 005 23	1,000 006 69	1,000 005 71	1,000 003 65	1,000 001 56
8	1	0,999 999 15	0,999 998 91	0,999 999 07	0,999 999 40	0,999 999 75
9	1	1,000 000 139	1,000 000 178	1,000 000 152	1,000 000 097	1,000 000 041

IX **Werte von $\frac{1}{3}\left(\frac{w}{{}^1/_2\pi}\right)^2$ in Gl. (64) und (68).** Tafel 3.

$w:\pi=$	m	$m+\frac{1}{6}$	Berührungs-punkte	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m=1$	1,333 333 3	1,814 814 8	2,319 098 9	3,000 000 0	3,703 703 7	4,481 481 5
2	5,333 333 3	6,259 259 3	7,276 999 8	8,333 333 3	9,481 481 5	10,703 703 7
3	12,000 000 0	13,370 370 4	14,811 005 4	16,333 333 3	17,925 925 9	19,592 592 6
4	21,333 333 3	23,148 148 1	25,037 858 8	27,000 000 0	29,037 037 0	31,148 148 1
5	33,333 333 3	35,592 592 6	37,925 761 9	40,333 333 3	42,814 814 8	45,370 370 3
6	48,000 000 0	50,703 703 7	53,481 513 0	56,333 333 3	59,259 259 3	62,259 259 3
7	65,333 333 3	68,481 481 5	71,703 698 2	75,000 000 0	78,370 370 4	81,814 814 8
8	85,333 333 3	88,925 925 9	92,592 594 1	96,333 333 3	100,148 148 1	104,037 037 0
9	108,000 000 0	112,037 037 0	116,148 148 6	120,333 333 3	124,592 592 6	128,925 925 9

IX **Werte von $\frac{1}{3}\left(\frac{w}{{}^1/_2\pi}\right)^2$ (δ) in Gl. (64).** Tafel 4.

$w:\pi=$	m	$m+\frac{1}{6}$	Berührungs-punkte	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m=1$	0	0,151 784 7	0,234 574 8	0,257 982 2	0,211 682 3	0,115 511 6
2	0	— 0,099 643 0	— 0,151 605 4	— 0,147 299 1	— 0,104 947 0	— 0,049 299 3
3	0	0,032 568 0	0,045 987 7	0,043 351 8	0,030 600 7	0,014 351 4
4	0	— 0,009 330 6	— 0,012 931 9	— 0,011 897 0	— 0,008 180 8	— 0,003 740 2
5	0	0,002 331 3	0,003 179 5	0,002 886 1	0,001 961 5	0,000 887 2
6	0	— 0,000 541 8	— 0,000 731 6	— 0,000 657 7	— 0,000 442 8	— 0,000 198 5
7	0	0,000 119 3	0,000 159 9	0,000 142 7	0,000 095 5	0,000 042 5
8	0	— 0,000 025 2	— 0,000 033 7	— 0,000 029 9	— 0,000 019 9	— 0,000 008 8
9	0	0,000 005 2	0,000 006 9	0,000 006 1	0,000 004 0	0,000 001 8

IX **Werte von $S:K$ nach Gl. (64).** Tafel 5.

$w:\pi=$	m	$m+\frac{1}{6}$	Berührungs-punkte	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m=1$	1,333 333	1,663 030	2,084 524	2,742 018	3,492 021	4,365 970
2	5,333 333	6,358 902	7,428 605	8,480 632	9,586 429	10,753 003
3	12,000 000	13,337 802	14,765 018	16,289 982	17,895 325	19,578 241
4	21,333 333	23,157 479	25,050 791	27,011 897	29,045 218	31,151 888
5	33,333 333	35,590 261	37,922 582	40,330 447	42,812 853	45,369 483
6	48,000 000	50,704 246	53,482 245	56,333 991	59,259 702	62,259 458
7	65,333 333	68,481 362	71,703 538	74,999 857	78,370 275	81,814 772
8	85,333 333	88,925 951	92,592 628	96,333 363	100,148 168	104,037 046
9	108,000 000	112,037 032	116,148 142	120,333 327	124,592 589	128,925 924

IX Werte von $\frac{1}{9} w^4$ in Gl. (65) und (69). Tafel 6.

$w:\pi=$	m	$m+\frac{1}{6}$	Berührungspunkte	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m=1$	8,232 323 4	20,051 374	32,742 969	54,792 614	83,512 595	122,270 791
2	173,171 717	238,520 323	322,391 989	422,782 513	547,308 144	697,505 546
3	876,681 819	1 088,344 49	1 335,514 46	1 624,161 30	1 956,332 65	2 337,024 81
4	2 770,747 48	3 262,210 75	3 816,575 71	4 438,201 71	5 133,151 77	5 906,687 18
5	6 764,520 21	7 712,563 54	8 756,854 59	9 903,934 04	11 160,088 7	12 532,108 8
6	14 026,909 1	15 651,604 9	17 413,532 3	19 320,146 2	21 379,224 4	23 598,663 5
7	25 986,580 8	28 551,294 4	31 301,317 4	34 245,383 6	37 392,397 0	40 751,482 4
8	44 331,959 7	48 143,349 2	52 195,373 7	56 497,949 3	61 061,202 7	65 895,454 5
9	71 011,227 4	76 419,244 1	82 130,429 2	88 155,903 8	94 506,995 0	101 195,226

IX Werte von $\frac{1}{9} w^4 \left[(\delta) + \frac{1}{4} (\delta)^2\right]$ in Gl. (65). Tafel 7.

$w:\pi=$	m	$m+\frac{1}{6}$	Berührungspunkte	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m=1$	0	1,712 092	3,395 671	4,813 136	4,841 299	3,171 878
2	0	— 3,781 964	— 6,681 570	— 7,440 034	— 6,041 185	— 3,208 883
3	0	2,652 64	4,149 95	4,313 70	3,341 02	1,712 17
4	0	— 1,314 80	— 1,970 98	— 1,955 38	— 1,446 10	— 0,709 25
5	0	0,505 17	0,734 15	0,708 70	0,511 3	0,245 1
6	0	— 0,167 3	— 0,238 2	— 0,225 6	— 0,159 8	— 0,075 2
7	0	0,049 7	0,069 8	0,065 2	0,045 6	0,021 2
8	0	— 0,013 6	— 0,019 0	— 0,017 5	— 0,012 1	— 0,005 6
9	0	0,003 5	0,004 9	0,004 5	0,003 1	0,001

IX Werte von $pl^4 : EJ$ nach Gl. (65). Tafel 8.

$w:\pi=$	m	$m+\frac{1}{6}$	Berührungspunkte	$m+\frac{3}{6}$	$m+\frac{4}{6}$	$m+\frac{5}{6}$
$m=1$	8,232 32	21,763 47	36,138 64	59,605 75	88,353 89	125,442 67
2	173,171 72	234,738 36	315,710 42	415,342 48	541,266 96	694,296 66
3	876,681 82	1 090,997 1	1 339,664 4	1 628,475 0	1 959,673 7	2 338,737 0
4	2 770,747 5	3 260,896 0	3 814,604 7	4 436,246 3	5 131,705 7	5 905,977 9
5	6 764,520 2	7 713,068 7	8 757,588 7	9 904,642 7	11 160,600	12 532,354
6	14 026,909	15 651,438	17 413,294	19 319,921	21 379,065	23 598,588
7	25 986,581	28 551,344	31 301,387	34 245,449	37 392,443	40 751,504
8	44 331,960	48 143,336	52 195,355	56 497,932	61 061,191	65 895,449
9	71 011,227	76 419,248	81 130,434	88 155,908	94 506,998	101 195,23

Die vorstehenden Tafeln sind so angeordnet, daß die Eingänge am Kopfe und in der ersten Spalte mit denen der Tafeln des siebenten und achten Abschnittes übereinstimmen. Die in gleicher Zeile und Spalte stehenden Werte sämtlicher Tafeln gehören also zusammen. Da aber w, δ und (δ) bloß Hilfsgrößen sind, so braucht man auf die früheren Tafeln nicht zurückzugreifen, wenn es sich nur darum handelt, zu einem gegebenen $S:K$ das entsprechende $pl^4:EJ$ zu bestimmen, oder umgekehrt. Auch die erste Tafel der vorstehenden Zusammenstellung ist hierfür entbehrlich. Sie gibt aber nach dem oben Ausgeführten einen sehr bequemen Maßstab für den Fehler, den man begeht, wenn man statt der strengen Gleichungen (64) und (65) die Näherungen (68) und (69) benutzt. Tafel 3 enthält den Näherungswert von $S:K$ selber, Tafel 4 das zugehörige, von (δ) abhängige Berichtigungsglied und Tafel 5 die Verbindung beider, also den genauen Wert von $S:K$. Ganz ähnlich findet man in Tafel 6 den Näherungswert von $pl^4:EJ$, in Tafel 7 das entsprechende Berichtigungsglied und in Tafel 8 als Summe den genauen Wert von $pl^4:EJ$. Die Zahlen bestätigen, was im Eingange dieses Abschnittes über die Zweckmäßigkeit der Abtrennung der Größe δ gesagt wurde; denn aus den Tafeln 5 und 8 für die Endwerte von $S:K$ und $pl^4:EJ$ läßt sich das Gesetz, nach dem sich diese Größen ändern, kaum erkennen, während es aus den Tafeln 3, 4 und 6, 7 für die Teilwerte, aus denen sie sich zusammensetzen, klar zu ersehen ist. Über den Gebrauch der Tafel 2 ist oben in den Erläuterungen zu Gl. (67) das Nötige gesagt. Ebenso geht schon aus den Bemerkungen zu Gl. (70) hervor, daß unter den Umständen, bei denen diese Gleichung anwendbar ist, die Tafeln überhaupt entbehrlich werden.

Um die Größenverhältnisse und Änderungsgesetze noch besser zu veranschaulichen, sind in der am Schluß eingefügten Abbildung 4 die Werte von $(n:2)^2$ und $S:K$ als Funktionen von w aufgetragen. Die Maßstäbe sind links und rechts am Rande des Netzes angegeben. $S:K$ konnte nur in kleinerem Umfange dargestellt werden, weil der Maßstab dafür so groß gewählt werden mußte, daß die Abweichung der genauen Werte [nach Gl. (64)] von den Näherungswerten [nach Gl. (68)] noch einigermaßen erkennbar blieb. Um die Unterschiede beider noch deutlicher hervorzuheben, sind sie (nach Zahlentafel IX 4) im oberen Teile der Abbildung besonders aufgetragen. Die lotrechten Abstände zwischen der betreffenden Wellenlinie und der durch Gl. (68) bestimmten gestrichelten Kurve, die offenbar eine Parabel ist, geben gleichfalls die genauen Werte von $S:K$. Mit I|II ist die Grenze zwischen dem zweiten und ersten Fall bezeichnet. Für diesen sind keine Kurven eingetragen, weil der Maßstab zu einer deutlichen Darstellung zu klein gewesen wäre.

X. Einfluß der verschiedenen Größen.

Bisher haben wir immer stillschweigend angenommen, daß die Stabkraft S und die elastische Querstützung p die veränderlichen Größen seien, deren gegenseitige Abhängigkeit durch die vorliegende Untersuchung in erster Linie ermittelt werden sollte, während die

übrigen Größen — also E, J und l — zunächst als unveränderlich betrachtet wurden. Nach diesem Gesichtspunkte sind daher die entwickelten Gleichungen aufgebaut. Es bietet aber selbstverständlich keine Schwierigkeit, sie so umzuformen, daß sie auch den Einfluß einer Änderung dieser Größen leicht erkennen lassen. Hinsichtlich E ist das ohne Bedeutung; dagegen ist der Einfluß von J und l für die Anwendung wichtig, weshalb wir hierauf etwas näher eingehen wollen. Dabei soll, um weitläufige Erörterungen zu vermeiden, nur der Einfluß auf p und S in Betracht gezogen werden, da die Bestimmung dieser Größen ja das Ziel der meisten in der Wirklichkeit vorkommenden Aufgaben bildet. Es wird dem Leser nicht schwerfallen, die Untersuchung im Bedarfsfalle selbst weiter auszudehnen.

Am einfachsten läßt sich ein Überblick über die fraglichen Gesetze mit Hilfe der Gleichung (11) gewinnen, indem man sie nach derjenigen Größe auflöst, deren Abhängigkeit von den übrigen bestimmt werden soll. Dabei kann man verschiedene Fälle zusammenfassen. So ergeben z. B. die beiden aus (11) folgenden Gleichungen

$$(71) \qquad p = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \frac{S^2}{EJ} \qquad \text{und} \qquad S = \sqrt{\frac{pEJ}{(^1/_2 n)^2}} \qquad (72)$$

den Einfluß sowohl einer Änderung der Stablänge $2\,l$, wie einer Änderung des Trägheitsmomentes J auf p und S.

Der Einfluß der Stablänge kommt nur in der Größe $(n:2)^2$ zur Geltung und ist mit Hilfe der Tafeln 2, 5 und 8 des vorigen Abschnittes leicht zu bestimmen. Man braucht nur

$$\text{im Fall (71) d. Wert } \frac{S}{K} = \left(\frac{2\,l}{\pi}\right)^2 \frac{S}{EJ}, \text{ im Fall (72) d. Wert } \frac{p\,l^4}{EJ}$$

zu berechnen und in Tafel 5 | Tafel 8

die Zeile und Spalte der nächstliegenden Zahl aufzusuchen, dann ergibt die gleiche Zeile und Spalte der Tafel 2 annähernd den zugehörigen Wert von $(n:2)^2$. Nötigenfalls kann ein genauerer Wert durch Einschaltung bestimmt werden, wofür die geringe Veränderlichkeit von $(n:2)^2$ günstig ist.

Der Einfluß von J drückt sich zugleich in J und $(n:2)^2$ aus; das Änderungsgesetz ist also nicht mehr so einfach, wie vorher. Da aber der zu jedem J gehörige Wert von $(n:2)^2$ in der gleichen Weise ermittelt werden kann, so läßt er sich immer leicht zahlenmäßig darstellen.

Auf die Gleichungen (71) und (72) können wir nun alle die Betrachtungen anwenden, die im vorigen Abschnitt dazu geführt haben, die Gleichung (67) durch (70) zu ersetzen. Wenn die Bedingungen erfüllt sind, die dort hinsichtlich der Größe von $S:K$ und von $p\,l^4:EJ$ gestellt wurden, so darf man auch hier näherungsweise

$$(73) \qquad \left(\frac{n}{2}\right)^2 = 1$$

setzen. Daraus folgt dann, daß p und S nahezu unabhängig sind von der Stablänge; ferner daß sich p umgehrt wie J, und S wie die Quadratwurzel aus J verhält. Bei den in der Wirklichkeit vorliegenden Verhältnissen ist die Bedingung (73), wie weiterhin gezeigt werden soll, meist genügend erfüllt.

XI. Anwendung auf Brücken.

Wenn bei einer Brücke die gegenseitige Aussteifung der Druckgurte fehlt, so befinden sich diese annähernd in dem Zustande, wie er bei den bisherigen Untersuchungen für den unter Druck stehenden, in der Querrichtung elastisch gestützten Stab vorausgesetzt wurde. Denn die Halbrahmen, die die Druckgurte der sogenannten offenen Brücken seitlich aussteifen, wirken als elastische Querstützen. Diese Wirkung ist freilich nicht stetig über die ganze Länge verteilt; sie greift vielmehr in einzelnen getrennten Stellen (den Knotenpunkten) an. Ferner ist auch das Trägheitsmoment J und die Spannung S der Gurte nicht in ganzer Länge gleich.[18]) Immerhin kann man sich aber von den dabei auftretenden Wirkungen wenigstens ein ungefähr zutreffendes Bild machen, indem man sie mit denjenigen vergleicht, die wir bei dem hier angenommenen Stab gefunden haben. Die Gleichungen (71) und (72) würden hierzu schon ausreichen, wenn die auf der rechten Seite stehenden Größen stets voneinander unabhängig wären. Das ist aber bei Gurtstäben insofern nicht immer der Fall, als das Trägheitsmoment J der Forderung genügen muß, daß unter dem Druck S kein Ausknicken innerhalb der Feldlänge eintreten darf. Wo J etwa wegen der baulichen Anordnung oder aus sonstigen Gründen überschüssig groß, also unabhängig von S angenommen ist, sind die Gleichungen (71) und (72) ohne weiteres anwendbar; wird dagegen J der Größe von S angepaßt, so tritt die hierfür maßgebende Bedingung noch hinzu. Auf den ersten Fall brauchen wir angesichts der ausführlichen Erläuterungen, die im vorigen Abschnitt zu (71) und (72) gegeben wurden, nicht weiter einzugehen. Dagegen möge der zweite, eine untere Grenze für J ergebende Fall etwas näher betrachtet werden.

Wenn das Trägheitsmoment J des Stabes so gewählt werden soll, daß das Stabstück von der Feldlänge s durch die Spannung S bei gelenkig gedachten Knotenpunkten gerade an die Knickgrenze gebracht werden würde, so muß es der Bedingung

$$S = \pi^2 \frac{EJ}{s^2} \tag{74}$$

---

[18]) Bei Brücken mit geradlinigen Gurten, die für die vorliegende Untersuchung allein in Betracht kommen können, nimmt J sowohl wie S bekanntlich von der Mitte nach den Enden hin ab. Die Fehler, die man begeht, wenn man J und S mit ihren eigentlich nur in der Mitte vorhandenen größten Werten in die oben entwickelten Gleichungen einführt, wirken entgegengesetzt auf das Ergebnis, heben sich also zum Teil auf.

genügen. Bezeichnen wir wieder die nur gedachte Kraft, die den ganzen Gurt von der Länge $2l$ bei fehlender Querstützung an die Knickgrenze bringen würde, (wie in den früheren Abschnitten) mit K, so lautet die entsprechende Bedingung

$$K = \pi^2 \frac{EJ}{(2l)^2}. \tag{75}$$

Daraus folgt

$$\frac{S}{K} = \left(\frac{2l}{s}\right)^2. \tag{76}$$

Setzt man den Wert $Ss^2 : \pi^2$, der sich für EJ aus (74) ergibt, in (71) ein, so geht dies über in $p = \pi^2 (n:2)^2 (S:s^2)$, was auch in der Form

$$P = \pi^2 \left(\frac{n}{2}\right)^2 \frac{S}{s} \tag{77}$$

geschrieben werden kann, wenn man den Wert ps mit P bezeichnet. Da p der Querstützungsdruck für die Längeneinheit ist, so stellt $ps = P$ den entsprechenden Druck für eine Feldlänge dar, d. h. die Kraft, die der Halbrahmen eines Feldes der elastischen Ausbiegung der oberen Enden der Pfosten um die Längeneinheit entgegensetzen muß, wenn bei der Gurtspannung S gerade die Knickgrenze für den Gurt als Ganzes erreicht werden soll. Da S und s gegeben sind, bleibt also nur noch der Wert von $(n:2)^2$ zu bestimmen, worauf sich die für die Quersteifigkeit der Brücke maßgebende Kraft P aus (77) in einfacher Weise berechnen läßt.

Wie man $(n:2)^2$ bei gegebenem $S:K$ mit Hilfe der Tafeln 2 und 5 des vorigen Abschnittes findet, ist dort genügend erörtert. Statt mit $S:K$ in Tafel 5 einzugehen, kann man dazu nach (76) auch die Größe $(2l:s)^2$ benutzen. Nun pflegt die Gurtlänge $2l$ ein ganzes Vielfaches der Feldlänge s zu sein. Bezeichnen wir dieses Vielfache, d. h. die Felderzahl, mit z, so ist nach (76) auch

$$\frac{S}{K} = z^2, \tag{78}$$

und der Wert von $S:K$ ist damit durch die gewählte Trägeranordnung von vornherein gegeben. Wir haben von dieser naheliegenden Beziehung schon am Schluß des vierten Abschnittes Gebrauch gemacht, indem wir den Wert von $S:K$ für einen Träger von 8 Feldern zu 64 angaben. Hieraus folgt jetzt aber der wichtige Schluß, daß die Größe $(n:2)^2$ unter den gemachten Voraussetzungen eine Funktion nur der Felderzahl ist. Da nun bei offenen (also mittelgroßen) Brücken die Zahl der Felder in ziemlich engen Grenzen — etwa zwischen 5 und 12 liegt, so lassen sich die in Betracht kommenden Werte von $(n:2)^2$ leicht in einer besonderen Übersicht zusammenstellen. Mit Hilfe der Tafeln 2 und 5 des vorigen Abschnittes und nach dem bei Gl. (71) angegebenen Verfahren findet man die folgenden Zahlen.

Werte von $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ für verschiedene Felderzahlen.

Felderzahl z	$\frac{S}{K} = z^2$	Nächstkleineres $S:K$ aus Tafel 5	Zugehöriges $(n:2)^2$ aus Tafel 2	Nächstgrößeres $S:K$ aus Tafel 5	Zugehöriges $(n:2)^2$ aus Tafel 2
5	25	23,157 . . .	0,998 792	25,050 . . .	0,998 452
6	36	35,590 . . .	1,000 196 5	37,922 . . .	1,000 251 5
7	49	48,000 . . .	1,000 000 0	50,704 . . .	0,999 967 9
8	64	62,259 . . .	0,999 990 4	65,333 . . .	1,000 000 0
9	81	78,370 . . .	1,000 003 65	81,814 . . .	1,000 001 56
10	100	96,333 . . .	0,999 999 07	100,148 . . .	0,999 999 40
11	121	120,333 . . .	1,000 000 15	124,592 . . .	1,000 000 10

Diese Zusammenstellung lehrt erstens, daß der Wert von $(n:2)^2$ nur in geringem Maße von der Felderzahl beeinflußt wird, da

der kleinste Wert für $z = 5$ mit rund 0,9985
vom größten Werte für $z = 6$ „ „ 1,0003
sich nur um 0,0018

unterscheidet. Für die Zwecke der Anwendung kann daher $(n:2)^2$ meist als unveränderlich betrachtet werden. Zweitens folgt daraus, daß man als Durchschnittswert $(n:2)^2 = 1$ annehmen darf. Damit geht (77) über in

(79) $$P = \pi^2 \frac{S}{s}.$$

Dieses sehr einfache Ergebnis besagt, daß der von einem Halbrahmen bei der Ausbiegung 1 zu leistende Stützungsdruck P in geradem Verhältnis zur Gurtkraft S und im umgekehrten Verhältnis zur Feldlänge s stehen muß, wenn sich der von dem Halbrahmen gestützte Gurt bei Belastung mit S gerade an der Knickgrenze befinden soll. Bedingung ist nur, daß bei einer Änderung von S oder s auch das Trägheitsmoment J des Gurtquerschnittes geändert wird, so daß es stets der Gleichung (74) genügt.

Bei allen bisher angestellten Betrachtungen ist immer der Gleichgewichtszustand an der Knickgrenze ins Auge gefaßt worden, von dem für die Ausführung erforderlichen Sicherheitsgrad also abgesehen. Um nun zum Schluß auch diesen zu berücksichtigen, nennen wir die Spannung, die der Stab mit r-facher Sicherheit gegen Knicken tragen soll, R. Dann ist bei gegebenem R die in den oben entwickelten Gleichungen auftretende Kraft S bestimmt durch

(80) $$S = Rr.$$

Die mit diesem S aus (74) und (79) berechneten Werte von J und P gewähren r-fache Sicherheit, wenn der Stab statt mit S nur mit R belastet wird.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin S.W.

$\left(\frac{n}{2}\right)^2$

